

511.324
Sch7a

DR. ERNST SCHRÖDER

WEILAND PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER
TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU KARLSRUHE IN BADEN

ABRISS DER ALGEBRA DER LOGIK

BEARBEITET IM AUFTRAG
DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

VON

DR. EUGEN MÜLLER

PROFESSOR AN DER OBERREALSCHULE ZU KONSTANZ

IN DREI TEILEN

ERSTER TEIL: ELEMENTARLEHRE

MIT 4 FIGUREN IM TEXT



LEIPZIG UND BERLIN

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER

1909

UNIVERSITY OF ILLINOIS
LIBRARY

Class

Book

Volume

764
511.324

Sch7a

1

Ja 09-20M

MATHEMATICS LIBRARY

~~PSYCHOLOGY
DEPARTMENT~~

The person charging this material is responsible for its return on or before the **Latest Date** stamped below.

Theft, mutilation, and underlining of books are reasons for disciplinary action and may result in dismissal from the University.

UNIVERSITY OF ILLINOIS LIBRARY AT URBANA-CHAMPAIGN

AUG 3 1972

JUL 25 RECD

DR. ERNST SCHRÖDER

WEILAND PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER
TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU KARLSRUHE IN BADEN

ABRISS DER ALGEBRA DER LOGIK

BEARBEITET IM AUFTRAG
DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

VON

DR. EUGEN MÜLLER

PROFESSOR AN DER OBERREALSCHULE ZU KONSTANZ

IN DREI TEILEN

ERSTER TEIL: ELEMENTARLEHRE

MIT 4 FIGUREN IM TEXT



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER

1909

511.324

Schma

LIBRARY
UNIVERSITY OF ALGERIA
ALGERIA

ALLE RECHTE, EINSCHLIESZLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Vorwort.

25F101MG
Special Math. Univers. Mos. 237P03 Lieb. 4. A

In dem umfangreichen handschriftlichen Nachlaß Schröders, und so auch in dem nach seinem Tode im Druck erschienenen Band II, 2 seiner „Vorlesungen über die Algebra der Logik“, finden sich kurze, nur andeutende Entwürfe und einzelne Bemerkungen zu einem „Abriß“ der Algebra der Logik, jedoch keine ausgeführte Darstellung irgend-eines Teils dieses Abrisses. Immerhin läßt sich die Absicht des Verfassers erkennen, nicht bloß einen Auszug aus seinem größeren Werk, den „Vorlesungen“, zu geben, sondern zugleich auch die Begründung und Entwicklung der Disziplin in manchen nicht unwesentlichen Punkten zu verbessern, wobei, wie in den „Vorlesungen“, die neuere einschlägige Literatur und auch private Mitteilungen an den Verfasser zweckentsprechend benützt werden sollten. Offenbar legte Schröder kein geringes Gewicht auf die Verwirklichung des geplanten Abrisses, die ihm leider nicht mehr beschieden war. — Wenn in der Tat die Algebra der Logik — wenigstens in Deutschland — bis heute noch nicht die verdiente Beachtung und Würdigung gefunden hat, so lag dies vielleicht auch an dem Mangel einer kurzen, wenn auch vollständigen einführenden Darlegung ihrer wichtigsten Methoden und Ergebnisse.*) Solchem Mangel versucht nunmehr der Abriß abzuhelpfen. — Der einstweilen vorliegende erste Teil behandelt die Voraussetzungen und Grundlagen der Gebiete-theorie, sodann einen elementaren Teil dieser selbst, in möglichster Anlehnung an das handschriftliche Material und an das Hauptwerk, jedoch — der ausgesprochenen Absicht Schröders gemäß — mit Berücksichtigung neuerer Forschungen.

Nur auf diese Elementarlehre beziehen sich übrigens ausschließlich die nachgelassenen Aufzeichnungen von Schröders Hand. Doch ist damit im wesentlichen auch schon der Weg vorgezeichnet für die Fortsetzung des Abrisses, von dem ein zweiter Teil, die Lehre von den Gebietsfunktionen und von der Auflösung der Gleichungen und Ungleichungen enthaltend, binnen kurzem erscheinen wird.

*) In Frankreich dürfte zur Verbreitung und Förderung des algebraisch-logischen Gedankens in Schröderscher Auffassung Herr Couturat wesentlich beigetragen haben durch seine Schrift: „L'Algèbre de la Logique“, 100 Seiten, Paris bei Gauthier-Villars, 1905 — in der Sammlung „Scientia“, Série Phys.-Math. No. 24.

Inhalt.

Vorwort	Seite III
-------------------	--------------

Allgemeine Voraussetzungen. Bezeichnungen.

	Seite	
§ 1. Die Dinge und deren Beziehungen	1	metrische Beziehungen und Aussagen 3
§ 2. Zeichen für Dinge und Beziehungen. Identität	1	§ 6. Unsymmetrische Beziehungen 3
§ 3. Binäre Beziehungen	2	§ 7. Allgemeine und spezielle Symbole 4
§ 4. Proposition oder Aussage. Aussagen-Identität	2	§ 8. Verallgemeinerung und Spezialisierung 5
§ 5. Subjekt und Prädikat. Sym-		§ 9. Die Gebietstheorie. Axiome, Theoreme und Relationen 6

Voraussetzungen aus der Aussagentheorie.

§ 10. Sekundäre Elemente	6	§ 17. Absolute Prämissen	13
§ 11. Die sekundäre Subsumtion	7	§ 18. Kommutativität und Assoziativität der Multiplikation	15
§ 12. Aussagen-Multiplikation	8	§ 19. Aussagen-Negation	16
§ 13. Transitivität der Subsumtion	9	§ 20. Notwendigkeit sekundärer Voraussetzungen	17
§ 14. Unsymmetrie der Subsumtion	10		
§ 15. Aussagen-Gleichheit	10		
§ 16. Reflexivität	12		


Gebietstheoretische Voraussetzungen.

§ 21. Elemente-System	18	§ 27. Das Axiom III	22
§ 22. Primäre Subsumtion	19	§ 28. Die Axiome IV und V	22
§ 23. Gebiete	20	§ 29. Die Axiome VI	23
§ 24. Die Axiome	20	§ 30. Die Axiome VII	24
§ 25. Das Axiom I	21	§ 31. Definition, Postulat und Prinzip	24
§ 26. Das Axiom II	21	§ 32. Veranschaulichung der Gebiete	25

Deduktion der Theorie.

<p style="text-align: center;">Schlüsse aus den drei ersten Axiomen.</p> <p>§ 33. Symmetrie der Gleichheit 27</p> <p>§ 34. Reflexivität 28</p> <p>§ 35. Transitivität der Gebietegleichheit 28</p> <p>§ 36. Vertauschung gleicher Prädikate bzw. Subjekte 28</p>		<p>§ 37. Gleichheit als immanente Identität 29</p> <p style="text-align: center;">Sätze über Null und Eins.</p> <p style="text-align: center;">Schlüsse aus den Axiomen I—V.</p> <p>§ 38. Spezielle Theoreme 30</p> <p>§ 39. Eindeutigkeit 30</p> <p>§ 40. Null als Prädikat, Eins als Subjekt 31</p>
---	--	---

Seite	Seite
Multiplikation und Addition.	
Schlüsse aus den Axiomen I—VI.	
§ 41. Das Produkt als Subjekt, die Summe als Prädikat	31
§ 42. Eindeutigkeit	31
§ 43. Kommutativität	31
§ 44. Assoziativität	32
§ 45. Äquivalenz zwischen Subsumtion und Gleichung	32
§ 46. Umformung einer Gleichung	33
§ 47. Tautologie und Absorptionssätze	33
§ 48. Das Eins-Produkt und die Null-Summe	34
§ 49. Beiderseitige Multiplikation und Addition	35
§ 50. Überschiebende Multiplikation und Addition	35
Sätze über Negation und Distribution.	
Schlüsse aus VII und den übrigen Axiomen.	
§ 51. Erste Distributions-Subsumtion	36
§ 52. Disjunkt-komplementäres Gebiet	37
§ 53. Eindeutigkeit der Negation	37
§ 54. Doppelte Negation	38
§ 55. Kontraposition von Gleichungen	38
§ 56. Obverse Gebiete	39
§ 57. Null- und Eins-Form für Subsumtionen	39
§ 58. Der Kontrapositionssatz für Subsumtionen	39
§ 59. Disjunkt-komplementär ist obvers	39
§ 60. Veranschaulichung der Negation	40
§ 61. Null- und Eins-Form der Gleichungen	40
§ 62. Produkt- und Summen-Entwicklung	41
§ 63. Entwicklung von Faktoren und Summanden	42
§ 64. Negation von Produkt und Summe	42
§ 65. Dualität	43
§ 66. Der Distributionssatz	43
§ 67. Umformung von Subsumtionen	44
§ 68. Fortfallen von Faktoren und Summanden	45
§ 69. Übungsaufgaben	45
Der zweiwertige Gebietekalkul.	
§ 70. Das Zweigebietesystem	47
§ 71. Die speziellen Propositionen	47
§ 72. Zweiwertige Symbole	48
§ 73. Synthetische Begründung des Zweigebietekalkuls	48
§ 74. Spezialisierung der Sekundär-Aussagen	49
§ 75. Die Zweiwertigkeits-Voraussetzung	49



Digitized by the Internet Archive
in 2021 with funding from
University of Illinois Urbana-Champaign

Allgemeine Voraussetzungen. Bezeichnungen.

§ 1. Denkelemente: Die Dinge und deren Beziehungen.

Alles Denken hat zwei Arten von Ergebnissen, die indessen meist sofort wieder als „Elemente“ des Denkens verarbeitet werden zu weiteren Ergebnissen derselben beiden und vielleicht auch anderer Arten: Es werden Denkgegenstände oder Gedankendinge, kurz: „Dinge“, auch „Elemente“ im engeren Sinn, erdacht, — d. h. gedacht, vorgestellt, erkannt, — mögen dieselben nun ihrem Stoffe nach der Wahrnehmung, der Anschauung, der Phantasie oder dem denkenden Verstand selbst entstammen, — und es werden zwischen diesen Dingen „Beziehungen“, Zusammenhänge, gemeinsame Gesichtspunkte erdacht, — festgestellt oder festgesetzt.

Auf einer gewissen Stufe der Ausbildung in der Kunst des Denkens werden die Dinge zu Begriffen, und es werden deren Beziehungen in Urteilen ausgesprochen.

Die nähere Untersuchung beider Betätigungen, des Erdenkens von Dingen und von Beziehungen der Dinge untereinander, muß hier beiseite bleiben. Es genügt, die beiden Arten von Ergebnissen oder Denkelementen unterschieden zu haben.

§ 2. Zeichen für Dinge und Beziehungen. Identität. Es seien die Buchstaben a, b, c, \dots Symbole oder Zeichen für Dinge, die Buchstaben A, B, C, \dots solche für Beziehungen der Dinge zueinander. Und zwar hat man sich z. B. unter dem Zeichen a , als dessen Bedeutung, Sinn oder auch „Wert“, irgendein Ding vorzustellen, unter b sodann irgendein „anderes“, das sich von dem Ding a irgendwie unterscheidet, — oder vielmehr unterscheiden kann, jedoch nicht notwendig unterscheiden muß.

Statt: die beiden Zeichen a und b , oder A und B , stellen ein und dasselbe Element dar, sagt man auch: die beiden Zeichen — oder die beiden Elemente a und b bzw. A und B sind „identisch“, — kurz geschrieben: $a \equiv b, A \equiv B$.

Ein wiederholt in derselben Überlegung vorkommendes Elementzeichen entspricht immer wieder demselben Element, oder ist „mit sich selbst identisch“, während es bei Gebrauch verschiedener Buchstabenzeichen ohne weitere Erläuterung dahingestellt und allenfalls späterer Festsetzung vorbehalten bleibt, ob die Zeichen identisch sein sollen oder nicht.

Ist Identität zwischen zwei Zeichen einmal festgestellt, so kann zur Bezeichnung des durch beide dargestellten Elements jederzeit nach Belieben das eine oder das andere Zeichen verwendet, auch das eine durch das andere nachträglich ersetzt oder mit dem anderen vertauscht werden.

§ 3. **Binäre Beziehungen.** Mit

$$aZb$$

sei ausgedrückt, daß „das Ding a zu dem Ding b in der Beziehung Z stehe“. Z ist dann eine „binäre“ Beziehung, d. i. eine solche zwischen nur zwei Dingen.

Sind z. B. die Dinge a und b Zahlen, und ist etwa a die kleinere von beiden, so ist mit „die Zahl a ist kleiner als die Zahl b “, kurz geschrieben:

$$a < b,$$

eine binäre Beziehung der Zahl a zur Zahl b gegeben; — desgleichen eine andere gleichfalls binäre mit

$$a = b, \quad \text{oder} \quad a - 2b = c, \quad \text{oder} \quad a + b < 10,$$

mit jeder Gleichung oder Ungleichung, worin die Zahlen a und b vorkommen.

Die Gleichung

$$a - 2b = c,$$

oder auch die Beziehung der Zahl a zu zwei andern b und c als deren arithmetisches Mittel oder halbe Summe

$$a = \frac{b + c}{2}$$

kann als Beispiel einer „ternären“ Beziehung — zwischen drei Dingen, den Zahlen a, b, c — dienen. Usw.

Im folgenden wird vorzugsweise nur von binären Beziehungen die Rede sein.

§ 4. **Proposition oder Aussage. Aussagen-Identität.** Der Ausdruck der Geltung oder des Bestehens einer Beziehung Z zwischen zwei Dingen a und b ,

$$aZb,$$

sowie auch die damit dargestellte Dingebeziehung selbst, heiÙe eine (binäre) Proposition oder Aussage.

Wird dasselbe Ding, das zunächst als Bedeutung des Buchstabens a gedacht wurde, außerdem auch mit c bezeichnet, so kann die Proposition aZb auch mit

$$cZb$$

wiedergegeben werden; desgleichen auch mit

$$cYb \text{ oder } aYb,$$

wofern die Beziehung Y mit Z identisch ist; usw. Diese Propositionen sind dann sämtlich auch ihrerseits als identische, als solche von einerlei Bedeutung anzusehen.

§ 5. **Subjekt und Prädikat. Symmetrische Beziehungen und Aussagen.** In der Proposition aZb heiÙe von den beiden Dingen oder „Aussage-Gliedern“ a und b das erste, dem Beziehungszeichen Z voranstehende a das „Subjekt“ der Aussage, das nachfolgende b deren „Prädikat“.

Nun kann z. B. eine Zahl a als Subjekt zu einer anderen b als Prädikat nicht anders in der Beziehung der „Gleichheit“ stehen, $a = b$, wie etwa $\frac{1}{2} = 1$, als daÙ zugleich umgekehrt $b = a$, die andere zur ersteren ebenfalls in dieser Beziehung steht. Ist dagegen eine Zahl a kleiner als eine andere b , $a < b$, so kann unmöglich zugleich $b < a$, diese kleiner als jene sein.

Eine Beziehung Z kann somit die besondere Eigenschaft haben, daÙ, wenn jemals irgendein Ding a in der Beziehung Z zu einem anderen b steht, aZb , dann stets notwendig auch die durch Vertauschung von Subjekt und Prädikat „umgekehrte“ Proposition bZa Geltung hat. In diesem Falle heiÙt die Beziehung Z , sowie auch jede Proposition aZb mit der Beziehung Z „umkehrbar“ oder „symmetrisch“.

Bei symmetrischen Propositionen ist die Unterscheidung zwischen Subjekt und Prädikat unwesentlich; beide Dinge stehen „zueinander“ in der symmetrischen Beziehung Z . Z. B. zwei Zahlen sind „einander“ gleich.

§ 6. **Unsymmetrische Beziehungen.** Eine unsymmetrische Beziehung Y andererseits kann so geartet sein wie die des „Kleiner-seins“ bei Zahlen, daÙ mit der Proposition aYb stets die umgekehrte bYa als unvereinbar, als widersprechend erscheint; oder aber die Umkehrung bYa ist mit der ursprünglichen Proposition aYb weder gefordert noch

ausgeschlossen; es gibt derartige Dinge a und b , für welche sowohl aYb wie bYa gilt, und daneben andere Dingepaare a, b , für die wohl aYb erfüllt ist, nicht aber bYa . Ist z. B. für zwei Zahlen a und b

$$a \leq b,$$

a „kleiner oder gleich“ b , „höchstens so groß wie“, „nicht größer als“ b , so gilt hier zugleich

$$b \leq a,$$

falls man sich unter a und b zwei gleich große Zahlen $a = b$ vorstellt; dagegen ist diese Umkehrung falsch, sobald $a < b$ angenommen wird.

§ 7. **Allgemeine und spezielle Symbole.** Ein Ding a kann als Subjekt zu einem Prädikat b in mehreren verschiedenen Beziehungen Z, Y, X, \dots stehen:

$$aZb, \quad aYb, \quad aXb, \dots$$

Und es können mehrere Dinge a, b, c, \dots zu anderen e, f, g, \dots zugleich in einer und derselben Beziehung Z stehen:

$$aZe, \quad bZf, \quad cZg, \dots$$

In der Zahlenlehre will nun z. B. die Proposition

$$\frac{ab}{b} = a,$$

als Beziehung etwa der Zahl a zur Zahl b , nicht bloß besagen, daß Multiplikation *einer gewissen* Zahl a mit einer gleichfalls besonders bestimmten Zahl b und darauf folgende Division mit dieser Zahl b wieder auf die erste a zurückführe oder sich gegenseitig aufhebe, sondern daß dies allgemein für je zwei *beliebige* Zahlen a und b zutreffe, daß *jede* Zahl a mit jeder b in der gedachten Beziehung stehe; — ebenso die andere Proposition

$$a \cdot 1 = a,$$

daß *jede beliebige* Zahl a durch Multiplikation mit der einen besonderen oder *speziellen* Zahl 1 ungeändert bleibt, — während etwa die Proposition $7 \cdot 1 = 7$ als *Spezialfall* der vorigen dasselbe nur von der Zahl 7 statt im allgemeinen von jeder Zahl a behauptet. — In der (quadratischen) Gleichung

$$x^2 = 9$$

endlich hat man sich unter x zwar nicht jeden beliebigen Zahlenwert vorzustellen, aber doch einen beliebigen von den beiden Werten $+3$ und -3 , die „der Gleichung genügen“, dieselbe „erfüllen“ oder „befriedigen“.

Somit kann ein jedes der Buchstabenzeichen $a, b, c, \dots, Z, Y, X, \dots$ in Propositionen auch zur Bezeichnung eines beliebigen unter mehreren oder allen in Betracht kommenden Elementen, Dingen oder Beziehungen dienen, als Zeichen von allgemeiner Bedeutung oder als „allgemeines Symbol“, im Gegensatz zu den Zeichen von besonderer Bedeutung, den „besonderen“ oder „speziellen Symbolen“, wie etwa den Zifferzeichen für besondere Zahlen. — Desgleichen sind „allgemeine Propositionen“, worin wenigstens ein allgemeines Elementesymbol vorkommt, zu unterscheiden von „speziellen Aussagen“ mit durchweg speziellen Symbolen.

In dem vorliegenden ersten Teil der Algebra der Logik wird es sich nur um einige wenige spezielle Beziehungen und Beziehungszeichen handeln. Dagegen sollen die Buchstabenzeichen für Dinge zumeist im Sinne allgemeiner Symbole gebraucht und verstanden werden.

§ 8. **Verallgemeinerung und Spezialisierung.** Eine allgemeine Proposition kann synthetisch oder induktiv, durch „Verallgemeinerung“, aus ihren besonderen Fällen entstanden sein, — wie etwa die Zahlenproposition

$$\frac{ab}{b} = a \quad \text{aus} \quad \frac{1 \cdot b}{b} = 1, \quad \frac{2 \cdot b}{b} = 2, \quad \frac{3 \cdot b}{b} = 3, \dots$$

$$\text{oder aus} \quad \frac{1 \cdot 1}{1} = 1, \quad \frac{2 \cdot 1}{1} = 2, \quad \frac{1 \cdot 2}{2} = 1, \quad \frac{2 \cdot 2}{2} = 2, \dots,$$

$$\text{ähnlich} \quad x^2 = 9 \quad \text{aus} \quad (+3)^2 = 9 \quad \text{und} \quad (-3)^2 = 9,$$

auf Grund der Übereinstimmung unter diesen einzelnen Aussagen: Die eine verwandelt sich in die andere, sobald man darin ein gewisses spezielles Symbol durchweg ersetzt durch ein anderes spezielles; vermitteltst eines neuen (in den Einzelaussagen nicht schon vorkommenden) allgemeinen Buchstabensymbols an Stelle jener speziellen Zeichen — hier Ziffern — erfolgt die Vereinigung der Einzelaussagen zu einer einzigen allgemeinen — oder allgemeineren Proposition.

Insofern jene aus irgendwelchen Wahrnehmungen geschöpften Einzelpropositionen den Anlaß zur Aufstellung und auch die — vorerst einzige — Gewähr für die Richtigkeit dieser allgemeinen Proposition abgeben, sagt man auch, man habe die letztere aus jenen „hergeleitet“, gefolgert, — man habe aus jenen auf diese geschlossen, usw.

Ist umgekehrt eine allgemeine Proposition irgendwoher als eine richtige gegeben oder bekannt, so lassen sich daraus — in analytischer Herleitung, deduktiv oder durch „Spezialisierung“ — spezielle oder doch speziellere Propositionen als besondere Fälle leicht gewinnen.

§ 9. Die Gebietetheorie. Axiome, Theoreme, Relationen.

Wie die Zahlenlehre die Beziehungen der Zahlen untereinander untersucht und zusammenstellt, so werden im folgenden Dinge einer gewissen anderen allgemeineren Art, die wir „Gebiete“ nennen, hinsichtlich ihrer Beziehungen zueinander den Gegenstand einer „Gebietetheorie“ bilden. Welcher Art diese Dinge sind, wird festgesetzt werden durch gewisse allgemeine Propositionen, die sog. „Axiome“, die von allen in Betracht zu ziehenden Dingen, von allen Gebieten als Bedeutungen der allgemeinen Symbole gelten sollen; nur auf diejenigen Dinge, von denen die Axiome gelten, bezieht sich die Theorie; nur von solchen — und von allen solchen — wird in derselben die Rede sein. Indem somit die Axiome insgesamt die Gebiete charakterisieren und definieren, sind sie innerhalb der Gebietetheorie von schlechthin allgemeiner oder absoluter Geltung. Daher wird auch vor allem deren Spezialisierung — diese einfachste, in Sinn und Zweck der allgemeinen Buchstabensymbole begründete Schlußweise — auf die nächstliegenden „Theoreme“ oder Lehrsätze führen.

Einige andere Hilfsmittel zur Herleitung von Theoremen aus Axiomen gehören einer besonderen Hilfsdisziplin, der „Propositionentheorie“, an. Von ihnen wird zunächst die Rede sein. Die übrigen Herleitungsmethoden werden ihren Berechtigungsausweis selbst erst von den Axiomen hernehmen. — Die Theoreme aber, in deren Gesamtheit der Inhalt der Theorie sich ausspricht, werden durchweg den Axiomen als ihren Quellen entspringen und deshalb absolute Geltung innerhalb der Theorie für sich in Anspruch nehmen im gleichen Sinne wie die Axiome.

Neben diesen absolut gültigen oder „absoluten“ — teils speziellen, teils schlechthin allgemeinen Aussagen, auch wohl „Formeln“ genannt, werden in der Gebietetheorie auch Propositionen von beschränkter Allgemeinheit auftreten — wie in der Zahlenlehre etwa die Proposition $x^2 = 9$ oder $a < b$, — die nämlich Geltung haben oder auch nicht, je nach Wahl der Dinge, die man sich unter den allgemeinen Symbolen vorstellt, — Propositionen von bedingter oder relativer Geltung oder kurz „Relationen“.

Voraussetzungen aus der Aussagentheorie.

§ 10. **Sekundäre Elemente.** Ist eine Proposition aus einer anderen hergeleitet, so besteht zwischen beiden Propositionen eine bestimmte Beziehung, nämlich diejenige von Grund und Folge, die „Folgebegründungsbeziehung“, die sich auch selbst in Form einer Proposition wird

aussprechen lassen. Die beiden ursprünglichen einzelnen Propositionen können dann als Glieder der Gesamtproposition erscheinen, der Grund naturgemäß als erstes Aussageglied oder Subjekt, die Folge als Prädikat.

So werden bei weiterer Verarbeitung vorhandener Elemente auch Propositionen zu Dingen, die als solche der sekundären Art oder als „Sekundärdinge“ von den „primären“ oder ursprünglichen Dingen unterschieden und etwa auch mit besonderen Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ bezeichnet seien. Dieselben treten miteinander in „sekundäre Beziehungen“ A, B, C, \dots , in dieselben wie die primären, oder auch in andere.

Eine Theorie der Sekundärdinge und ihrer Beziehungen wird unter dem Namen einer Aussagenlehre oder Propositionentheorie im zweiten Teile des Abrisses §§ 76 ff. zu entwickeln sein. Diese Theorie wird somit „sekundäre Propositionen“ oder Aussagen über Aussagen enthalten, wie etwa

$$\alpha Z \beta \text{ oder } (\alpha Y b) Z (c X d).$$

Hier, wie in den nachfolgenden Fällen, sind bei Sekundärpropositionen die sie zusammensetzenden primären Aussagen in Klammern zu schreiben, sofern sie ausführlich angegeben und nicht bloß durch einfache Buchstabenzeichen $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ angedeutet sind.

§ 11. **Die sekundäre Subsumtion.** Es läßt sich indessen keinerlei Theorie über irgendwelche Dinge primärer oder auch sekundärer Art aufstellen, ohne daß man einige Tatsachen aus jener Propositionentheorie von vornherein voraussetzt. Gewisse sekundäre Elemente finden sich schon im Begriffe einer primären deduktiven Theorie selbst mit eingeschlossen.

Insofern nämlich in einer solchen Theorie stets die einzelnen Theoreme als Folgerungen aus den Axiomen erscheinen müssen, ist damit jedenfalls die Folgerungsbeziehung benötigt. Diese Beziehung, aus später zu erläuternden Gründen auch „Subsumtion“ oder „Einordnung“ genannt, — §§ 22, 84 u. a. — sei dargestellt mittels eines besonderen Beziehungszeichens \Leftarrow „sub“, — und zwar werde, wenn aus einer Proposition α die andere β abgeleitet ist oder folgt, stets die erstere als Subjektaussage oder „Prämisse“, Bedingungssatz, vorangestellt, während β die Prädikataussage, „Konklusion“ oder Folge ist. Es bedeutet also „ α sub β “,

$$\alpha \Leftarrow \beta:$$

aus α folgt β , oder: wenn die Aussage α richtig ist, so trifft auch β zu; die Proposition α ist eingeordnet der anderen β . — Eine Sekundärproposition dieser Art mag auch selbst „eine Subsumtion“ heißen.

Zahlenbeispiele: — vergl. § 8 —

$$\left(\frac{ab}{b} = a\right) \Leftarrow \left(\frac{79 \cdot 96}{96} = 79\right);$$

$$(a = b) \Leftarrow (ac = bc),$$

d. h. Gleiches, a und b , mit der nämlichen Zahl c multipliziert, ergibt Gleiches;

$$(a = b) \Leftarrow (a^2 = b^2),$$

Gleiches, quadriert, gibt Gleiches.

Bisher war angenommen, daß α und β in $\alpha \Leftarrow \beta$ primäre Propositionen bedeuten. Es kann aber auch eine solche Subsumtion $\alpha \Leftarrow \beta$ selbst wieder aus einer anderen $\gamma \Leftarrow \delta$ folgen, — in Zeichen:

$$(\gamma \Leftarrow \delta) \Leftarrow (\alpha \Leftarrow \beta).$$

Z. B.: Daß, wenn $x = 3$ ist, notwendig $x^2 = 9$ sich ergeben muß, folgt aus dem allgemeinen Satz, daß die Quadrate gleicher Zahlen gleich sind,

$$\{(a = b) \Leftarrow (a^2 = b^2)\} \Leftarrow \{(x = 3) \Leftarrow (x^2 = 9)\}.$$

Es können also in einer Sekundäraussage, und insbesondere in einer Subsumtion $\alpha \Leftarrow \beta$, die einzelnen Teilaussagen α und β auch selbst noch von sekundärer Art sein.

§ 12. **Aussagen-Multiplikation.** Ist von drei Zahlen a, b, c vorausgesetzt $a < b$ und $b < c$, oder $a < b < c$, so folgt aus beiden Prämissen zusammen die Konklusion $a < c$. Man schreibt

$$(a < b)(b < c) \Leftarrow (a < c).$$

Ebenso bedeutet

$$(a = b)(b = c) \Leftarrow (a = c):$$

Sind zwei Zahlen a und c gleich einer dritten b ; so sind sie unter sich gleich. Hiernach versteht sich auch

$$(a < b)(b < c)(c < d) \Leftarrow (a < d).$$

Folgt allgemein irgendeine Proposition α als Konklusion nicht aus einer Aussage allein, wohl aber aus dem Zusammentreffen oder der gleichzeitigen, „simultanen“ Geltung zweier oder mehrerer Propositionen $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, so treten diese als Prämissen einfach nebeneinander oder vereinigen sich, wie wir sagen, multiplikativ als „Faktoren“ zu einem „Propositionen-Produkt“ $\alpha\beta\gamma\dots$, nämlich zu der Sekundäraussage, daß sie alle zusammen gelten;

$$\alpha\beta\gamma\dots \Leftarrow \alpha.$$

Hierzu noch weitere Beispiele über Zahlen a, b, c, \dots :

$$(a = b)(c = d) \Leftarrow (ac = bd),$$

Gleiches, mit Gleichem multipliziert, gibt Gleiches. Ferner aus § 6:

$$(a \leq b) (b \leq a) \Leftarrow (a = b).$$

Ergibt sich eine Konklusion κ schon aus einer Prämisse α allein, so wird κ auch gelten, wenn man neben α noch andere Prämissen β, γ, \dots als gültig voraussetzt:

$$(1) \quad (\alpha \Leftarrow \kappa) \Leftarrow (\alpha\beta\gamma \dots \Leftarrow \kappa).$$

Hier beginnt die Reihe der propositionentheoretischen Sätze, die als „selbstverständlich“ vorausgesetzt und — mit fortlaufender Numerierung — zum bevorstehenden Gebrauch bereitgestellt werden.

Gestattet eine Proposition α mehrere Schlüsse auf verschiedene Konklusionen $\kappa, \lambda, \mu, \dots$, so wird, wofern nur α statt hat, daraus die Geltung aller Konklusionen $\kappa, \lambda, \mu, \dots$ zusammen, also ihr Produkt folgen;

$$(2) \quad (\alpha \Leftarrow \kappa) (\alpha \Leftarrow \lambda) (\alpha \Leftarrow \mu) \dots \Leftarrow (\alpha \Leftarrow \kappa\lambda\mu \dots).$$

Auch die Faktoren eines Produkts können, wie die Subsumtionsglieder — vgl. den vorigen § 11 — Sekundäraussagen sein.

Folgt κ aus α und desgleichen λ aus β , so ist mit dem Zusammenbestehen beider Prämissen α und β auch die gleichzeitige Geltung der Konklusionen κ und λ gefordert:

$$(3) \quad (\alpha \Leftarrow \kappa) (\beta \Leftarrow \lambda) \Leftarrow (\alpha\beta \Leftarrow \kappa\lambda).$$

Man sagt, die Konklusion sei hier aus den beiden Prämissen durch beiderseitiges oder „überschiebendes Multiplizieren“ zu erhalten.

§ 13. **Transitivität der Subsumtion.** Wenn $x = 3$ ist, so wird man, um etwa darnach die Größe $7x^2$ zu bestimmen, zunächst

$$(x = 3) \Leftarrow (x^2 = 9)$$

schließen, und sodann weiter

$$(x^2 = 9) \Leftarrow (7x^2 = 63),$$

womit auch

$$(x = 3) \Leftarrow (7x^2 = 63)$$

als erwiesen gelten wird.

Allgemein: folgt aus einer Proposition α eine andere β , und aus dieser sodann eine dritte γ , $\alpha \Leftarrow \beta \Leftarrow \gamma$, so ist γ mittelbar auch als eine Folgerung von α anzusehen,

$$(4) \quad (\alpha \Leftarrow \beta) (\beta \Leftarrow \gamma) \Leftarrow (\alpha \Leftarrow \gamma),$$

und ebenso in einer fortlaufenden Reihe von Konklusionen

$$\alpha \Leftarrow \beta \Leftarrow \gamma \Leftarrow \delta \Leftarrow \dots$$

jede als Folgerung einer jeden vorangehenden. Um dieser Eigenschaft

willen heißt die Subsumtion eine „transitive“ Sekundärbeziehung. — Die Zahlenbeziehungen der Gleichheit und des „Kleiner-seins“ sind — den Bemerkungen im vorigen § 12 zufolge — transitive Primärbeziehungen.

Die meisten Theoreme der Gebiete- und jeder anderen Theorie folgen aus den Axiomen nur mittelbar, unmittelbar dagegen aus vorgehenden, schon früher aus den Axiomen hergeleiteten Theoremen.

§ 14. **Unsymmetrie der Subsumtion.** Für zwei gleiche Zahlen a und b gilt stets

$$(a = b) \in (b = a),$$

wie schon unter § 5 erwähnt. — Offenbar ist überhaupt eine Beziehung Z als eine symmetrische gekennzeichnet durch die *allgemeine* sekundäre Proposition

$$(aZb) \in (bZa)$$

— § 5 — oder auch ebensogut durch

$$(bZa) \in (aZb).$$

Auch in einem Zahlenbeispiel des § 11 ist der Schluß umkehrbar:

$$(ac = bc) \in (a = b),$$

Gleiches, ac und bc , durch dieselbe (von Null verschiedene) Zahl c dividiert, ergibt Gleiches. — Zwischen den beiden (relativen — § 9, Schluß) Zahlenpropositionen $a = b$ und $ac = bc$ besteht somit auch eine *symmetrische* Sekundärbeziehung.

Dagegen läßt sich die andere Zahlensubsumtion

$$(a = b) \in (a^2 = b^2)$$

des § 11 nicht umkehren: aus $a^2 = b^2$ folgt nicht notwendig $a = b$; es könnte vielmehr bei dieser Voraussetzung auch $a = -b$ sein; es folgt nur die Übereinstimmung von a mit b dem absoluten Betrag nach, abgesehen vom Vorzeichen.

Die Folgerungsbeziehung ist also im allgemeinen nicht symmetrisch; und zwar kommt dieser Sekundärbeziehung jene (zweite) Art von Unsymmetrie zu, wie sie für primäre Beziehungen in § 6 an dem Beispiel der mit \leq dargestellten Zahlenbeziehung erläutert wurde: Es gibt sowohl umkehrbare als auch nicht umkehrbare Subsumtionen.

§ 15. **Aussagengleichheit.** Gesetzt, es sei $\alpha \in \beta$; jede Konklusion γ aus β , $\beta \in \gamma$, folgt wegen der Transitivität dann auch aus α . Dagegen bleibt dahingestellt, ob man nicht aus α mehr schließen kann

als aus β . — Ist nun aber die Subsumtion $\alpha \in \beta$ umkehrbar, gilt auch $\beta \in \alpha$, so lassen sich offenbar auch aus α nur ganz dieselben Schlüsse ziehen wie aus β , und keine anderen.

Zwei Propositionen α und β , von denen man irgendwie zeigen kann, daß sie in den beiderseitigen Folgerungen durchaus übereinstimmen, — daß nichts aus der einen von beiden folgt, was sich nicht auch aus der anderen herleiten ließe, sollen einander „gleiche“ oder „äquivalente“ Propositionen heißen: „ α gleich β “,

$$\alpha = \beta.$$

Es ist also

$$(5) \quad (\alpha \in \beta) (\beta \in \alpha) \in (\alpha = \beta).$$

Beispiele für Zahlen a, b, c, \dots :

$$(a < b) = (b > a), \quad (a = b) = (b = a), \\ (a = b) = (ac = bc).$$

Allgemein gilt für jede *symmetrische* Beziehung Z zwischen beliebigen Dingen a, b — vgl. § 14 — die Äquivalenz

$$(aZb) = (bZa).$$

Besteht übrigens die Aussagengleichheit in der Identität der Folgerungen, so muß ihr selbst auch — einer Sekundärbeziehung — die Eigenschaft der Symmetrie zukommen,

$$(6) \quad (\beta = \alpha) = (\alpha = \beta),$$

sowie die der Transitivität — vgl. § 13, (4) —

$$(7) \quad (\alpha = \beta) (\beta = \gamma) \in (\alpha = \gamma),$$

entsprechend der — selbstverständlichen — Symmetrie und Transitivität der Identität als einer bloßen Beziehung zwischen mehreren Zeichen oder Vorstellungen eines Dinges — § 2 —.

Aus einer fortlaufenden Reihe eingeordneter und gleicher Aussagen wie

$$\alpha \in \beta \in \gamma = \delta = \varepsilon \in \zeta$$

wird man daher leicht die Folgerungs- und allenfalls auch die Gleichheitsbeziehung zwischen zwei beliebigen unter diesen Aussagen entnehmen können, z. B.

$$\alpha \in \delta, \quad \gamma = \varepsilon, \quad \beta \in \varepsilon, \quad \alpha \in \zeta.$$

Zur kurzen Andeutung, daß eine Subsumtion oder Gleichung aus einer solchen fortlaufenden Reihe herausgehoben sei, mag der Dreipunkt \therefore dienen — vgl. auch § 17 —; z. B. hier:

$$\therefore \gamma \in \zeta.$$

§ 16. **Reflexivität.** In Zahlenbeispielen des vorstehenden § 15 ist freilich ein und dasselbe Zeichen verwendet für die sekundäre Aussagengleichheit und für die primäre Zahlengleichheit. Verwechslungen der Aussagengleichheit mit andern sonst gebräuchlichen Bedeutungen des Gleichheitszeichens werden sich immerhin leicht vermeiden lassen.

Zwei gleiche Aussagen brauchen nicht notwendig identisch zu sein oder dasselbe zu besagen — vgl. das Zahlenbeispiel

$$(a = b) = (ac = bc).$$

Wohl aber sind umgekehrt zwei identische Aussagen stets einander gleich, und es ist jede Aussage sich selbst gleich,

$$(8) \quad \alpha = \alpha,$$

— eine Eigenschaft der Gleichheitsbeziehung, die man „Reflexivität“ nennt.

Auch die Aussagensubsumtion ist eine reflexive Beziehung: Aus jeder Aussage, sofern sie wahr ist, läßt sich selbstverständlich zunächst auch schließen, daß sie selbst gilt,

$$(8)' \quad \alpha \in \alpha.$$

Hier bietet sich nun schon die Möglichkeit, aus den bisherigen Aussagensätzen, insbesondere aus (5) § 15 und (1) § 12, einige Schlüsse zu ziehen mittels des analytischen Verfahrens der Spezialisierung. Die Einzelheiten dieses Verfahrens sind im nachfolgenden § 17 noch näher zu beleuchten.

So könnte — nebenbei — aus der Subsumtion (8)' die Gleichung (8) folgen mit Hilfe von (5), indem man hierin dem Zeichen β denselben Wert beilegt wie dem α , oder indem man statt β durchweg α setzt, wonach die Prämissen beide $\alpha \in \alpha$ laut (8)' erfüllt sind. —

Läßt sich etwa zeigen, daß alles, worauf man je aus einer Aussage β schließen könnte, auch aus einer anderen Aussage α folgen muß, so gehört zu diesen gemeinsamen Konklusionen wegen der Reflexivität der Subsumtion (8)' $\beta \in \beta$ jedenfalls auch β selbst, und es ist somit $\alpha \in \beta$ — vgl. den Anfang des vorigen § 15 —. Wenn nun zudem aus α nicht mehr folgt als aus β , d. h. wenn $\alpha = \beta$ ist — § 15 —, so muß außer $\alpha \in \beta$ auch umgekehrt $\beta \in \alpha$ sein; von zwei gleichen Aussagen gilt keine ohne die andere,

$$(5)' \quad (\alpha = \beta) \in (\alpha \in \beta), \quad (\alpha = \beta) \in (\alpha \in \beta) (\beta \in \alpha).$$

Dies, mit (5) zusammengehalten, ergibt aber eben wieder gemäß (5), — indem man darin $\alpha = \beta$ für α und $(\alpha \in \beta) (\beta \in \alpha)$ für β substituiert, — die Gleichung

$$(5)'' \quad (\alpha = \beta) = (\alpha \in \beta) (\beta \in \alpha).$$

Weiterhin kann man in (1) § 12 der Prämisse $\alpha \Leftarrow x$ vermöge (8)' dadurch genügen, daß man als Konklusion x aus α diese Aussage α selbst nimmt: $(\alpha \Leftarrow \alpha) \Leftarrow (\alpha\beta\gamma \dots \Leftarrow a)$. Für diesen Wert von x gilt somit auch die Konklusion als allgemeine Formel

$$(9) \quad \alpha\beta\gamma \dots \Leftarrow \alpha, \quad \alpha\beta \Leftarrow \alpha, \quad \alpha\beta \Leftarrow \beta.$$

Man schließt auch leicht von (9) auf (1) zurück: (9) $\alpha\beta \Leftarrow \alpha$ ergibt mit der Prämisse $\alpha \Leftarrow x$ zusammen wegen der Transitivität (4) § 13 in der Tat die Konklusion $\alpha\beta \Leftarrow x$,

$$(\alpha\beta \Leftarrow \alpha) (\alpha \Leftarrow x) \Leftarrow (\alpha\beta \Leftarrow x);$$

diese Konklusion schreibt man dann der einen — relativen — Prämisse $\alpha \Leftarrow x$ allein zu; absolut gültige Prämissen, wie $\alpha\beta \Leftarrow \alpha$, können jederzeit fortgelassen werden — § 17 —.

Endlich erhält man in ähnlicher Weise die Umkehrung des Satzes (2) § 12: Ist $\alpha \Leftarrow x\lambda$ vorausgesetzt, so ergänzt man nach (9) dazu die Prämissen $x\lambda \Leftarrow x$ und $x\lambda \Leftarrow \lambda$, wonach (4) die Konklusionen $\alpha \Leftarrow x$ und bzw. $\alpha \Leftarrow \lambda$ liefert, oder nach (2) das Konklusionenprodukt

$$(\alpha \Leftarrow x\lambda) \Leftarrow (\alpha \Leftarrow x) (\alpha \Leftarrow \lambda);$$

diese Subsumtion vereinigt sich aber wieder vermöge (5) mit (2) zu der Äquivalenz

$$(2)' \quad (\alpha \Leftarrow x\lambda) = (\alpha \Leftarrow x) (\alpha \Leftarrow \lambda).$$

§ 17. **Absolute Prämissen.** An den Schlüssen von (8)' auf (8) zurück mittels (5), sowie von (1) auf (9) verdeutlicht man sich leicht den Gebrauch von voraussetzungsweise oder erwiesenermaßen gültigen Sekundärsubsumtionen, hier von (5) und (1), in der Theorie überhaupt. — Solche Subsumtionen geben in Form hypothetischer Urteile einen Folgerungszusammenhang zwischen Prämissen und Konklusionen der relativen Aussagenart. Dabei ist aber stets nur an diejenigen Spezialisierungen gedacht, für welche die Prämissen erfüllt sind und absolute Geltung haben. Und nur für solche Spezialisierungen schließt man sodann auf die gleichfalls absolute, nicht mehr an die Prämissen gebundene Geltung der entsprechend spezialisierten Konklusionen. Diese treten also aus dem sekundären Zusammenhang heraus als selbständige Theoreme oder Formeln.

Der Dreipunkt \therefore — gesprochen etwa: „folglich“ — mag auch hier, im gleichen Sinne wie bei Transitivitätsschlüssen — § 15 —, die vorangegangene Isolierung eines Theorems andeuten; also z. B.

$$(\alpha \Leftarrow \alpha) \underset{(8)'}{\Leftarrow} (\alpha \underset{(8)'}{\Leftarrow} \alpha) \underset{(5)}{\Leftarrow} (\alpha = \alpha),$$

$$\therefore \alpha = \alpha; \quad (8)$$

$$(\alpha \underset{(8)'}{\Leftarrow} \alpha) \underset{(1)}{\Leftarrow} (\alpha\beta \Leftarrow \alpha), \quad \therefore \alpha\beta \Leftarrow \alpha. \quad (9)$$

Durch die Nummern unterhalb der Beziehungszeichen sind die zur Stelle beizuziehenden Sätze angegeben.

Dagegen bieten der Rückschluß von (9) auf (1) und die Herleitung von (2)' im vorigen § 16 Beispiele der Entstehung oder der Bestätigung von sekundären Subsumtionen als Theoreme. Behufs Beweises solcher Subsumtionen sind die vorangehenden Sätze jederzeit sämtlich zur Verfügung und können nach Bedarf neben die Prämissen relativer Geltung eintreten als die selbstverständlichen, sonst stillschweigend mit vorausgesetzten „absoluten Prämissen“ aller möglichen Konklusionen. — So lautet ein Beispiel des § 11

$$(x = 3) \Leftarrow (x^2 = 9)$$

vollständiger: Wenn $x = 3$ ist, — und wenn übrigens die gewöhnlichen Rechengesetze gelten, insbesondere der Satz: Gleiches, quadriert, gibt Gleiches — vgl. § 11 —, und wenn $3^2 = 9$ ist, usw. —, dann ist $x^2 = 9$;

$$(x = 3) \{ (a = b) \Leftarrow (a^2 = b^2) \} (3^2 = 9) \Leftarrow (x^2 = 9).$$

Nachdem sodann die absoluten Prämissen ihre Dienste getan zur eingehenderen Begründung der Konklusionen, pflegt man erstere in der endgültigen Fassung der Sekundärtheoreme als überflüssig wieder fortzulassen.

Aus einer relativen Prämisse α — und ebenso aus mehreren — folgt eine andere Relation \varkappa — abgesehen von dem Fall axiomatischer Festsetzung $\alpha \Leftarrow \varkappa$ — überhaupt nur vermöge irgendwelcher vorangehender Sätze, mögen diese nun als absolute Prämissen ausdrücklich angegeben sein oder nicht; aus der Relation α läßt sich ebensoviel und nicht mehr schließen als aus ihrem Produkt $\alpha\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\dots$ mit beliebigen, schon als absolut gültig bekannten Propositionen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$, d. h. — § 15 — es besteht die Subsumtion und bzw. die Äquivalenz

$$(\varepsilon) \quad \alpha \Leftarrow \alpha\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\dots, \quad \alpha = \alpha\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\dots$$

Insofern hier die Symbole $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$ nicht beliebige, sondern nur absolute Aussagen bedeuten dürfen, ist der Satz (ε) von besonderer — relativer — Art, wogegen alle andern hier aufzustellenden und zu numerierenden Aussagensätze schlechthin allgemein, für beliebige Aussagen als Werte ihrer Symbole $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \varkappa, \lambda, \mu, \dots$ gelten.

Der erwähnte Schluß von (9) auf (1) lautet nunmehr in vollständiger Darstellung

$$\begin{aligned} (\alpha \notin x) &\underset{(8)}{\Leftarrow} (\alpha\beta \notin \alpha) \underset{(9)}{(\alpha \notin x)} \underset{(4)}{\Leftarrow} (\alpha\beta \notin x) \\ \therefore (\alpha \notin x) &\Leftarrow (\alpha\beta \notin x); \end{aligned} \quad (1)$$

desgleichen der Beweis von (2)' — minder einfach, indem man zunächst Hilfssätze (2)₁, (2)₂ und (2)₃ — Umkehrung von (2) — aufstellt:

$$\begin{aligned} (\alpha \notin x\lambda) &\underset{(8)}{\Leftarrow} (\alpha \notin x\lambda) \underset{(9)}{(x\lambda \notin x)} \underset{(4)}{\Leftarrow} (\alpha \notin x) \\ \therefore (\alpha \notin x\lambda) &\underset{(4)}{\Leftarrow} (\alpha \notin x). \end{aligned} \quad (2)_1$$

Ebenso zeigt man, daß

$$\begin{aligned} (\alpha \notin x\lambda) &\underset{(4)}{\Leftarrow} (\alpha \notin \lambda); \quad (2)_2 \\ \{(\alpha \notin x\lambda) \underset{(2)_1}{\Leftarrow} (\alpha \notin x)\} \{(\alpha \notin x\lambda) \underset{(2)_2}{\Leftarrow} (\alpha \notin \lambda)\} &\Leftarrow \\ &\underset{(2)}{\Leftarrow} \{(\alpha \notin x\lambda) \Leftarrow (\alpha \notin x) (\alpha \notin \lambda)\} \end{aligned}$$

usw. — oder, dasselbe in noch weiterer Abkürzung,

$$(2)_1(2)_2 \underset{(2)}{\Leftarrow} \therefore (\alpha \notin x\lambda) \Leftarrow (\alpha \notin x) (\alpha \notin \lambda); \quad (2)_3$$

endlich, ebenso abgekürzt,

$$(2)_3(2) \underset{(5)}{\Leftarrow} \therefore (\alpha \notin x\lambda) = (\alpha \notin x) (\alpha \notin \lambda). \quad (2)'$$

§ 18. Kommutativität und Assoziativität des Produktes.

Bedeutet das Produkt $\alpha\beta$ die gleichzeitige Geltung der beiden Aussagen α und β , so muß es gleichgültig sein, welche von beiden an erster Stelle erwähnt wird, — so hat $\beta\alpha$ dieselbe Bedeutung oder ist identisch mit $\alpha\beta$. Die Faktoren eines Produktes sind umstellbar; das Produkt ist in „kommutativer“ oder symmetrischer Weise aus seinen Faktoren zusammengesetzt, — wie ein Zahlenprodukt.

Da identische Aussagen stets auch einander eingeordnet und gleich sind, so hat man damit den „Kommutationsatz“

$$(10) \quad \beta\alpha \Leftarrow \alpha\beta, \quad \beta\alpha = \alpha\beta.$$

Andererseits wird man in einem Zahlenbeispiel des § 12:

$$a < b < c < d,$$

aus der Transitivität der vorliegenden Zahlenbeziehung

$$(a < b) (b < c) \Leftarrow (a < c)$$

die Konklusion $a < d$ mittels Zerteilung des Prämissenproduktes auf

verschiedenen Wegen gewinnen: entweder — mit Bezug von (3), (8)' und (4)

$$[(a < b) (b < c)] (c < d) \notin (a < c) (c < d) \notin (a < d),$$

oder auch

$$(a < b) [(b < c) (c < d)] \notin (a < b) (b < d) \notin (a < d).$$

Diese Schlußweisen beruhen außer auf den genannten Sätzen noch auf einer besonderen Eigenschaft des Produktes von mehr als zwei, z. B. von drei, Aussagen α, β, γ : Wird etwa das Produkt $\alpha\beta$ mit ϱ , $\beta\gamma$ mit σ bezeichnet, so kann man das Produkt $\alpha\beta\gamma$ aller drei Einzelaussagen auch darstellen durch $\varrho\gamma$ oder $(\alpha\beta)\gamma$, und durch $\alpha\sigma$ oder $\alpha(\beta\gamma)$; d. h. statt: Es gelten alle drei Aussagen, kann man ohne Unterschied auch sagen: es gelten zwei von ihnen mit der dritten zusammen; man darf die Faktoren nach Belieben zu Teilprodukten zusammenfassen oder „assoziieren“. — Indem man wieder nach (8)' und (8) von Identität auf Subsumtion und Äquivalenz schließt, ergibt sich der „Assoziationsatz“:

$$(11) \quad \begin{cases} \alpha\beta\gamma \notin (\alpha\beta)\gamma \notin \alpha(\beta\gamma) \notin (\alpha\beta)\gamma \notin \alpha\beta\gamma, \\ \alpha\beta\gamma = (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma). \end{cases}$$

Auf Grund der Sätze (10) und (11) läßt sich nunmehr die „überschiebende Multiplikation“ von Gleichungen auf diejenige für Subsumtionen (3) § 12 gründen:

$$(12) \quad \begin{aligned} (\alpha = \beta) (\gamma = \delta) &\notin_{(5)'(3)} [(\alpha \notin \beta) (\beta \notin \alpha)] [(\gamma \notin \delta) (\delta \notin \gamma)] \notin \\ &\notin_{(11)} (\alpha \notin \beta) (\beta \notin \alpha) (\gamma \notin \delta) (\delta \notin \gamma) \notin_{(10)(11)} [(\alpha \notin \beta) (\gamma \notin \delta)] [(\beta \notin \alpha) (\delta \notin \gamma)] \notin \\ &\notin_{(3)(3)} (\alpha\gamma \notin \beta\delta) (\beta\delta \notin \alpha\gamma) \notin_{(5)} (\alpha\gamma = \beta\delta) \end{aligned}$$

$$\therefore (\alpha = \beta) (\gamma = \delta) \notin (\alpha\gamma = \beta\delta).$$

Dieser Satz (12) wieder ermöglicht eine Ergänzung zu den Sätzen (2) § 12 und (2)' § 16 mit kurzer Herleitung:

$$(2)'' \quad \begin{aligned} (\alpha = \beta\gamma) &=_{(5)''} (\alpha \notin \beta\gamma) (\beta\gamma \notin \alpha) =_{(2)'(12)} (\alpha \notin \beta) (\alpha \notin \gamma) (\beta\gamma \notin \alpha) \\ \therefore (\alpha = \beta\gamma) &= (\alpha \notin \beta) (\alpha \notin \gamma) (\beta\gamma \notin \alpha). \end{aligned}$$

§ 19. **Aussagen-Negation.** Um auszudrücken, daß aus einer Aussage α eine andere β nicht folge, oder daß $\alpha \notin \beta$ falsch sei oder nicht gelte, — also zur „Verneinung“ oder „Negation“ der Folgebeziehung, dient das Zeichen \notin und die „Unsubsumtion“

$$\alpha \notin \beta$$

„ α nicht sub β “; z. B. für Zahlen a, b

$$\text{aus § 14: } (a^2 = b^2) \not\Leftarrow (a = b),$$

$$\text{aus § 5: } (a < b) \not\Leftarrow (b < a),$$

$$\text{aus § 6: } (a \leq b) \not\Leftarrow (b \leq a).$$

Ebenso setzt man für „ α ist nicht gleich β “ die Ungleichung

$$\alpha \neq \beta;$$

z. B.

$$(a = b) \neq (a^2 = b^2).$$

Auch primäre Propositionen sollen durch einen — wagrecht übersetzten — „Negationsstrich“ verneint oder negiert erscheinen, wie etwa

$$\overline{aZb} \quad \text{oder} \quad a\overline{Z}b,$$

„das Ding a steht nicht in der Beziehung Z zum Ding b “, oder: die Proposition aZb ist falsch, unrichtig, ungültig.

Im Gegensatz zur Unsubsumtion $\alpha \not\Leftarrow \beta$ bedeutet hiernach die Subsumtion

$$\alpha \Leftarrow \overline{\beta}:$$

Aus der Proposition α folgt, sofern sie richtig ist, daß β nicht gilt; oder: Die Geltung von α widerspricht derjenigen von β ; usw.

Zahlenbeispiele aus den §§ 5 und 6:

$$(a < b) \Leftarrow \overline{(b < a)}$$

$$(a \leq b) = \overline{(b < a)}$$

$$\overline{(a \leq b)} = (b < a)$$

$$\overline{(a < b)} \not\Leftarrow (b < a).$$

§ 20. **Notwendigkeit sekundärer Voraussetzungen.** Es sind hiermit vier sekundäre Elemente eingeführt: Die Subsumtion und die Äquivalenz, die Multiplikation und die Negation. Drei von ihnen sind nicht allein unerlässlich bei Begründung einer jeden deduktiven Theorie, sondern sie gehören schon von vornherein zum Begriff einer solchen Theorie überhaupt — § 9 —, nämlich außer der Subsumtion — § 11 — das Produkt und die Negation: Insofern die Theorie sich aus allen Axiomen und Theoremen als gleichzeitig — unbedingt oder absolut — gültigen Propositionen zusammensetzen und deren Produkt vorstellen wird, — und insofern der Gedanke an etwaige gegenteilige Meinungen — der Anlaß und Anstoß zur Aufstellung einer Theorie überhaupt — zugleich zur ausdrücklichen Ablehnung und Verneinung solcher ent-

gegenstehender Annahmen nötigen und so zu Theoremen und Axiomen verneinenden Inhalts führen wird.

Nur die Aussagenäquivalenz wäre freilich allenfalls entbehrlich und ersetzbar durch Subsumtionenprodukte wie die aus (5)'' § 16 und (2)'' § 18. Doch wäre es äußerst beschwerlich und unzweckmäßig, mit der Subsumtion als einziger Aussagenbeziehung sich zu behelfen und auf die mittels der Äquivalenz zu erzielende Ausdrucks- und Gedanken-kürzung ganz zu verzichten.

Auch die sekundären Voraussetzungen (1)–(12) §§ 12–18 könnten wohl an Zahl und Inhalt um etwas verringert werden. Es war hier aber nicht die Frage, mit welchem Minimum von aussagentheoretischen Voraussetzungen der Gebietekalkül sich noch begründen lasse; sondern es kam vielmehr nur an auf eine *vollständige* Aufzählung aller für gewöhnlich stillschweigend benutzten Aussagensätze, von denen auch hier bei Aufstellung der Gebietetheorie Gebrauch gemacht werden soll.

Angesichts der immerhin ziemlich umfangreichen aussagentheoretischen Zurüstungen könnte man daran denken, hier sogleich die weiteren Teile der Aussagentheorie anzuschließen, oder auch diese letztere — womöglich mit einfacheren Voraussetzungen — insgesamt als ein Ganzes der Gebietetheorie voranzustellen. Allein von vornherein ist begreiflich: Soll die Aussagentheorie ihren Inhalt und Gegenstand — soll sie die Gesetze der Herleitung von Theoremen aus anderen und aus Axiomen selbst wieder herleiten aus ihren Axiomen, so muß von eben diesen Gesetzen ein nicht allzu unbeträchtlicher Teil axiomatisch vorausgesetzt werden. In der Tat wird jeder Versuch nach dieser Richtung hin lehren, daß die dazu erforderlichen Voraussetzungen im wesentlichen auch zur Begründung der allgemeinen Gebietetheorie ausreichen. Die Aussagentheorie ist nämlich nichts anderes als die Theorie eines besonderen — besonders einfachen — Gebietesystems — vgl. §§ 76 ff. im zweiten Teil dieses Abrisses.

Gebietstheoretische Voraussetzungen.

§ 21. **Elementesystem.** Es sind nunmehr auch die Primärelemente soweit als nötig zu bestimmen.

Diese Elemente müssen vor allem „zu einem System zusammengehören“. Die Dinge a, b, c, \dots gehören mit der Beziehung Z zusammen zu einem Elementesystem, wenn jedes Ding p aus der Reihe der Dinge a, b, c, \dots zu jedem andern Ding q unter ihnen überhaupt in irgendeiner Beziehung steht, und zwar entweder in der Beziehung Z ,

pZq , oder aber, wo nicht, doch in einer damit in Widerspruch stehenden Beziehung, so daß $p\bar{Z}q$ zu setzen ist. — Hierbei sei nicht nur Z eine einzige bestimmte — spezielle — Beziehung, sondern es sei auch unter \bar{Z} eine in gleicher Weise bestimmte Beziehung, oder wohl auch eine Alternative zwischen mehreren solchen Beziehungen zu verstehen.

Zur Erläuterung diene hier wieder ein Zahlenbeispiel. Zwei Zahlen a und b sind stets entweder einander gleich $a = b$, oder aber ungleich $a \neq b$; unter dem letzteren Fall pflegt man sich weiter nur die beiden Möglichkeiten vorzustellen, daß a kleiner sei als b , $a < b$, oder aber umgekehrt $b < a$. — Das System, dem nebst den Zahlen als Dingen diese Gleichheitsbeziehung — mit dieser Verneinung — angehört, ist das System der reellen Zahlen. — Ist hingegen nur die eine Zahl a reell, z. B. 2 oder $\sqrt{4}$, die andere b imaginär, $\sqrt{-4}$ oder $2i$, so stehen a und b zwar wohl überhaupt in irgendwelchen Beziehungen zueinander, z. B. in der: $b^2 = -a^2$, oder auch: Es sind beides Zahlen; aber es trifft keine der drei oben gedachten Beziehungen zu; $\sqrt{4}$ ist weder gleich groß wie $\sqrt{-4}$, noch auch kleiner oder größer; man kann also auch nicht $\sqrt{4} \neq \sqrt{-4}$ setzen in demjenigen bestimmten Sinne, wie dies bei zwei reellen Zahlen geschehen könnte. — Diese beiden Zahlen gehören mit der gedachten Beziehung der Zahlengleichheit — oder auch z. B. mit der des „Kleiner-seins“ — nicht zu einem System.

§ 22. **Primäre Subsumtion.** Wir beschränken von nun an die Untersuchung weiterhin auf solche Elementesysteme, denen (mindestens) eine binäre — § 3 — „reflexive“ und „transitive“ Beziehung angehört.

Eine Beziehung Z heißt reflexiv, wenn jedes Ding p des Systems, zu dem Z gehört, mit sich selbst in dieser Beziehung steht, pZp — § 16 —.

Und daß eine Beziehung Z transitiv sei, will sagen — § 13 —: So oft im System die Proposition pZq neben der qZr besteht, — wobei das Prädikat q in der einen Proposition mit dem Subjekt der andern übereinstimmt —, so stehen auch die beiden nicht gemeinsamen Glieder p und r in der gleichen Beziehung Z ,

$$(pZq)(qZr) \in (pZr);$$

man kann hier auch Prämissen samt Konklusion vereinigt denken in der fortlaufenden oder Doppelproposition

$$pZqZr.$$

Eine binäre, reflexive und transitive, einem Elementesystem zugehörige Beziehung, sonst beliebiger Art, möge — nach einem wichtigen Spezialfall — „Subsumtion“ oder „Einordnung“ heißen und mittels des Zeichens \Subset „sub“ dargestellt werden:

$$a \Subset b,$$

„ a sub b “, oder: Das Ding a ist eingeordnet dem Ding b .

Man kann diese Beziehung z. B. als Ein- oder Unterordnung eines Begriffes a unter den andern Begriff b deuten, — ebensogut aber auch im Gegenteil als Überordnung des Begriffes a über b , da auch diese Begriffsbeziehung reflexiv und transitiv ist. Auch die unter den Zeichen $=$, \leq und \geq dem reellen Zahlensystem zugehörigen Beziehungen stellen ebensoviele besondere Arten der Einordnung vor.

Daß hier für die primäre Einordnung dieselbe Benennung und Bezeichnung gewählt ist wie oben — § 11 — für die sekundäre — transitive und reflexive — Folgerungsbeziehung, wird sich später vollends rechtfertigen — § 84 u. a. — Eine Verwechslung der primären mit der sekundären Subsumtion schließt sich beim Gebrauch beider Beziehungen nebeneinander von selbst aus.

§ 23. **Gebiete.** In der Voraussetzung der Zugehörigkeit einer Einordnungsbeziehung zu einem Elementesystem liegt zugleich auch eine Voraussetzung über die Dinge des Systems.

Solche Dinge, von denen jedes zu jedem entweder in einer Einordnungsbeziehung steht, — und zwar stets in der nämlichen, — oder aber in einer andern gegenteiligen Beziehung, mögen fortan — im weiteren Sinne — „Gebiete“ eines Systems oder einer „Gebiete-Mannigfaltigkeit“ heißen.

Im engeren Sinne enthält der Gebiete-Begriff, wie er im folgenden untersucht werden soll, noch eine Reihe von Eigenschaften mehr.

§ 24. **Die Axiome.** Die sämtlichen Eigenschaften der Gebiete a, b, \dots im engeren Sinne, d. i. ihre Beziehungen untereinander, sind gegeben durch die folgenden Axiome.

- | | | |
|-----------------|---|---|
| I | . | $a \Subset a$, Identitäts- oder Tautologieaxiom. |
| II | | $(a \Subset b) (b \Subset c) \Subset (a \Subset c)$, Subsumtionsschluß. |
| III | | $(a \Subset b) (b \Subset a) = (a = b)$, Gleichheitsdefinition. |
| IV _x | 0 | $\Subset a$, Nullpostulat. IV ₊ $a \Subset 1$, Einspostulat. |
| V | | $1 \Subset 0$, Existenzpostulat. |

$$VI_{\times} \quad (x \in a) (x \in b) = (x \in ab), \quad | \quad VI_{+} \quad (a \in y) (b \in y) = (a + b \in y),$$

Produktdefinition. Summendefinition.

$$VII_{\times+} \quad (a + z) (\bar{a} + z) = z = az + \bar{a}z,$$

Negations- oder Distributionsprinzip.

Hierin ist einem jeden der Buchstabenzeichen a, b, c, x, y, z die Bedeutung „jedes beliebige Gebiet der Mannigfaltigkeit“ beizulegen, und nur die beiden Ziffernsymbole 0 und 1 werden sich als spezielle oder eindeutige durch die Axiome IV_{\times} , IV_{+} und V gekennzeichnet finden. Die Axiome sind hiernach durchweg allgemeine Aussagen — mit Ausnahme des Existenzaxioms V .

Die beigesetzten Benennungen der einzelnen Axiome entstammen ihrem hauptsächlichen Gebrauch und werden sich auch durch diesen vollends von selbst erklären.

Bei der folgenden vorläufigen kurzen Erläuterung der Axiome mag, wenn $a \in b$ ist, das Subsumtionssubjekt a bequemlichkeitshalber auch als „Untergebiet“ (Minor), wohl auch als „Teilgebiet“ von b , dem „Obergebiet“ (Maior), bezeichnet werden.

§ 25. **Das Axiom I.** Jedes Gebiet ist sich selbst eingeordnet, ist sein eigenes Unter- und Obergebiet, sein Subjekt und Prädikat. Die Subsumtion ist eine reflexive Beziehung.

Eine Subsumtion von der Form $a \in a$ mit gleichlautenden — identischen — Subsumtionsgliedern, die also nach Axiom I stets als richtig anzusehen ist, mag auch eine „tautologische“ heißen.

§ 26. **Das Axiom II.** Alle Teilgebiete a eines Gebietes b sind auch jedem Obergebiet c des letzteren b eingeordnet. Das Prädikat c eines Prädikates b ist auch Prädikat zu des letzteren Subjekt a . Die Subsumtionsbeziehung ist transitiv.

Bei Anwendung dieses Axioms mag des öfteren Gebrauch gemacht werden von der abgekürzten Darstellung in Gestalt einer „fortlaufenden“ oder „Doppelsubsumtion“

$$a \in b \in c,$$

wobei das Gebiet b als „mittleres oder Zwischengebiet“, „Zwischenwert“ von a und c , auch als „liegend zwischen“ dem „untersten“ Gebiet a und dem „obersten“ c bezeichnet werde.

Durch die Axiome I und II zusammen sind die beiden Begriffe der Subsumtion und des Gebietes im weiteren Sinne in Rücksicht aufeinander ausreichend bestimmt.

§ 27. **Das Axiom III.** Ein Gebiet sei „gleich“ einem anderen, mag bedeuten, daß ein jedes von beiden Gebieten dem andern eingeordnet sei. — Doch setzt eine solche Aussagendefinition stets notwendig nicht nur Äquivalenz, sondern Identität zwischen Subjekt- und Prädikataussage — § 15 — und könnte unmittelbar nur dargestellt werden mittels eines Identitätszeichens wie etwa \equiv ,

$$(a = b) \equiv (a \in b) (b \in a).$$

In der Tat ist das Axiom *III* — in immanentem Sinne, vgl. § 37 — lediglich als eine Zusammenfassung der drei meist einzeln anzuwendenden Teilsubsumtionen — § 18 (2)'' — anzusehen: Wenn je zwei Gebiete einander gegenseitig eingeordnet sind, so sind es zwei gleiche Gebiete, und umgekehrt: Von zwei gleichen Gebieten ist stets das eine dem andern eingeordnet,

$$III' \quad (a \in b) (b \in a) \in (a = b),$$

$$III'' \quad (a = b) \in (a \in b),$$

$$III''' \quad (a = b) \in (b \in a).$$

Hiermit und mit der *Äquivalenz III* ist die Gebietegleichheit $a = b$ in einer für den gebietstheoretischen Gebrauch ausreichenden Weise gekennzeichnet.

Es verschlägt daher nichts, auch das Axiom *III* selbst als Definition anzusprechen, anstatt nur etwa zu sagen, das Axiom ersetze oder enthalte die Definition, oder diese sei mit jenem zugleich vorausgesetzt.

In ähnlicher Weise wäre eine — übrigens ebenfalls leicht zu vermeidende Verwechslung der Gebietegleichheit mit der Primärzeichen-Identität — § 2, vgl. auch unten § 37 — zwar nicht berechtigt, aber zumeist gewissermaßen unschädlich, wie sich noch weiterhin zeigen wird. — Wären mit $a = b$ die beiden Gebiete a und b als identisch bezeichnet, so würden offenbar die Teilaxiome *III''* und *III'''* dem Sinne nach mit dem Axiom *I* zusammenfallen.

Die Zugehörigkeit der Gleichheit zum Gebietesystem folgt aus der mit § 22 vorausgesetzten Zugehörigkeit der Subsumtionsbeziehung. Denn gilt dieser Voraussetzung zufolge für zwei beliebige Gebiete a und b stets entweder 1^o) $a \in b$ oder aber 2^o) $a \notin b$, sowie in jedem dieser beiden Fälle wieder außerdem entweder 3^o) $b \in a$ oder 4^o) $b \notin a$, so ist auch stets entweder $a = b$, nämlich im Falle 1^o)3^o), oder aber $a \neq b$ in jedem der drei übrigen Fälle 1^o)4^o), 2^o)3^o) und 2^o)4^o).

§ 28. **Die Axiome IV und V.** Durch diese Axiome wird die Untersuchung auf Systeme von solchen Gebieten eingeschränkt, die

sämtlich zwischen (mindestens) einem gemeinsamen untersten Gebiet 0, Null und einem obersten 1, Eins liegen,

$$0 \notin a \notin 1,$$

wobei dieses jenem nicht eingeordnet ist, $1 \notin 0$.

Diese Axiome führen also, wie auch die weiter folgenden, keine neuen Beziehungsbegriffe mehr ein, sondern neue Gebiete, hier ein Null- und ein Einsgebiet.

Die Subsumtionsbeziehung wird übrigens durch V — im Verein mit den beiden Axiomen IV , die auf $0 \notin 1$ schließen lassen werden, — ausdrücklich als eine unsymmetrische hingestellt, nachdem schon die Zusammenfassung einer Subsumtion mit ihrer Umkehrung im Gleichheitsbegriff — Axiom III — auf diese Unsymmetrie vorläufig anspielt.

Während ferner die Axiome I und IV die Geltung gewisser Subsumtionen fordern, setzt nunmehr V nebenbei fest, daß doch nicht ein jedes Gebiet jedem anderen eingeordnet sei, und läßt so die Subsumtion $a \notin b$, allgemein betrachtet, als Relation erscheinen — vgl. § 9 —.

Die besondere Art der Numerierung IV_x und IV_+ wird sich später erklären.

§ 29. **Die Axiome VI** enthalten die Definitionen der beiden Gebieteknüpungen, nämlich der „Multiplikation“ und der „Addition“. Ein „Produkt“ ab , auch $a \cdot b$ (oder $a \times b$), „ a mal b “, zweier beliebiger Gebiete a und b , der „Faktoren“, ist hiernach ein Gebiet, dem alle gemeinsamen Untergebiete x der Faktoren eingeordnet sind, und auch nur solche, — darunter jedenfalls das Nullgebiet 0, wogegen die „Summe“ $a + b$ „ a plus b “ zweier „Summandengebiete“ oder „Summenglieder“ a und b selbst eingeordnet ist allen gemeinsamen Obergebieten y der Summanden, und zwar ausschließlich solchen, also auch dem Gebiet 1.

Hier ist die Unterscheidung beider Axiome an der gemeinsamen Nummer VI durch angehängtes Mal- bzw. Pluszeichen leicht verständlich.

Die Aussagenfaktoren der beiden Äquivalenzen VI — § 18 (2)'' — seien entsprechend den Teilaxiomen des Gleichheitsaxioms III — § 27 — numeriert:

$$\begin{array}{l|l} VI'_x & (x \notin a)(x \notin b) \notin (x \notin ab) \\ VI''_x & (x \notin ab) \notin (x \notin a) \\ VI'''_x & (x \notin ab) \notin (x \notin b) \\ \hline VI'_+ & (a \notin y)(b \notin y) \notin (a + b \notin y) \\ VI''_+ & (a + b \notin y) \notin (a \notin y) \\ VI'''_+ & (a + b \notin y) \notin (b \notin y). \end{array}$$

Die Teilaxiome VI'_x und VI'_+ , wie auch III' werden sich im Gebrauch als die wichtigeren erweisen.

§ 30. **Die Axiome VII** bestimmen beide zusammen das „Negat“ oder die „Verneinung“ \bar{a} „a Strich“ oder „a nicht“, „non a“ eines beliebigen Gebietes a mittels gewisser Beziehungen beider Gebiete \bar{a} und a zu einem jeden (anderen) beliebigen Gebiet z : Letzteres ist stets sowohl gleich dem Produkt seiner beiden Summen mit a und \bar{a} , als auch gleich der Summe seiner Produkte mit den nämlichen beiden Gebieten.

Doch wird sich der Negatbegriff später vermöge anderer Eigenschaften — § 52 — weit leichter verdeutlichen lassen. — Vgl. auch § 32.

Die Klammern — vgl. § 10 — sollen stets bei möglichst sparsamer Anwendung alle Mißverständnisse ausschließen. Setzt man fest, wie in der Arithmetik: In Klammer muß stehen eine jede Summe, wenn dieselbe als Faktor in einem Produkt vorkommt, — so braucht keine Klammer gesetzt zu werden, wenn umgekehrt ein Produkt die Rolle eines Summanden übernimmt. — Also hätte in VII der Ausdruck $(a+z)(\bar{a}+z)$ einen anderen Sinn, wenn man die Klammern entfernte:

$$a + z\bar{a} + z \equiv a + (z\bar{a}) + z \equiv (a + z\bar{a}) + z,$$

— vgl. § 44 Theoreme 8)₊ — ferner

$$a + z(\bar{a} + z) \equiv a + [z(\bar{a} + z)];$$

dagegen ist

$$az + \bar{a}z \equiv (az) + (\bar{a}z),$$

zu unterscheiden von

$$a(z + \bar{a}z),$$

und von

$$a(z + \bar{a})z \equiv [a(z + \bar{a})]z, \quad \text{usw.}$$

§ 31. **Definition, Postulat und Prinzip.** Nach dem Gesagten setzen die Axiome gewisse Beziehungen zwischen gewissen Dingen fest — vgl. § 1 —. Hierdurch werden beiderlei Elemente, Dinge und Beziehungen, in Rücksicht aufeinander bis zu gewissem Grad bestimmt. Von diesen Elementen wird die Theorie in der Tat keinen anderen Gebrauch machen als den durch die Axiome selbst ermöglichten und vorgeschriebenen, — wenn man absieht von der Benutzung auch der „allgemeinen“ und der „aussagentheoretischen Voraussetzungen“ §§ 1—9 bzw. 10—19. Somit sind diese Grundelemente der Theorie durch die Axiome für ihre bevorstehende Anwendung hinreichend gekennzeichnet oder „definiert“, d. h. man kann die Definition leicht aus einem oder mehreren Axiomen zusammen schöpfen oder ablesen.

Der Aufbau der Theorie auf den Axiomen erfordert außerdem die begriffliche Möglichkeit und Wirklichkeit aller mit den Axiomen defi-

nierten Grundelemente. Die Axiome enthalten zugleich schon den Gedanken an solche Wirklichkeit und die Forderung derselben. Man hat somit die Axiome auch als Ausdruck dieser Forderungen oder „Postulate“ anzusehen.

Bei jedem Axiom endlich ist die unmittelbare Voraussetzung und Quelle aller Theoreme, die daraus folgen, in dem zu erblicken, was das Axiom noch sagt, abgesehen von seinem definierenden und postulierenden Inhalt, — in dem reinen Urteilsgehalt, — in der Behauptung der Gültigkeit der betreffenden Beziehung zwischen den darin gedachten Dingen, wenn man Dinge und Beziehung als begrifflich bestimmt und gegeben hinnimmt. Diesem Urteilsgehalt nach mag das Axiom etwa als ein „Prinzip“ der Theorie bezeichnet werden.

Bei Anwendung eines Axioms kann neben dem Prinzip bisweilen auch der Definitions- oder der Postulatgehalt in den Vordergrund treten.

Das Wort „Axiom“ könnte, zumal wenn etwa von evidenten, allgemein denknötwendigen u. dgl. Axiomen die Rede wäre, an die transzendente Frage erinnern, ob unter unseren grundlegenden Begriffen und Prinzipien sich solche befinden, ohne die wir nicht streng mathematisch oder überhaupt nicht wissenschaftlich denken könnten. Diese Frage soll hier in keiner Weise berührt werden.

§ 32. **Veranschaulichung der Gebiete.** Zu der durch die Axiome verlangten Denkmöglichkeit des Gebietesystems, — zur Möglichkeit der folgerichtigen Ausgestaltung einer Gebietetheorie gehört selbstverständlich vor allem, daß die Axiome einander nicht widersprechen. Ein etwaiger, zunächst vielleicht verborgener Widerspruch unter ihnen müßte sich im Gebietekalkül und eben durch diesen früher oder später herausstellen.

Gelingt es indessen, als Verwirklichung und Veranschaulichung des Elementesystems einen konkreten Denkbereich bekannter Art, worin die Axiome sämtlich Geltung haben, nachzuweisen und unmittelbar vor Augen zu stellen als wirklich, also möglich, so ist damit der Beweis, daß die Axiome miteinander verträglich sind, zum voraus erbracht.

Zu dem Ende können als Gebiete betrachtet werden die irgendwie, z. B. kreisförmig begrenzten Flächenstücke einer ebenfalls begrenzten Fläche — Fig. 1 —.

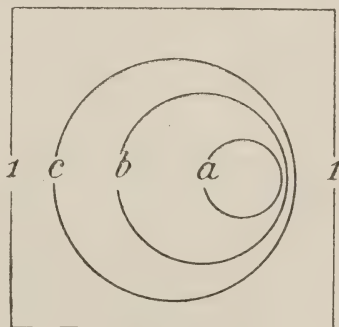


Fig. 1.

Ein Flächengebiet a sei einer anderen Fläche b eingeordnet $a \in b$, wenn a ein Teil der Fläche b ist. Ist dann zugleich b wieder eine Teilfläche eines dritten Gebietes c , so gehört auch a als Teil dem Gebiet c an; d. h. das Axiom *II* trifft zu. Ein jedes Flächenstück läßt sich übrigens tautologisch als sein eigenes Teilgebiet auffassen — $a \in a$, Axiom *I*. Andererseits kann offenbar hier die gegenseitige Einordnung zweier Gebiete a und b oder — Axiom *III* — die Gleichung $a = b$ nur bedeuten, daß die Flächen a und b zusammenfallen oder identisch sind; es ist dann das Gebiet a , auch b genannt, sich selbst gleich und sich selbst eingeordnet.

Um ferner den Axiomen *IV* und *V* Genüge zu tun, verstehe man unter der Fläche 1 die gesamte Fläche, der alle einzelnen Flächen als Teile eingeordnet sind, — unter der Fläche 0 aber, die allen anderen Flächen als gemeinsamer Teil zugehören soll, entweder, da auseinanderliegende Flächen „nichts“ miteinander gemein haben, eben *das Nichts*, —

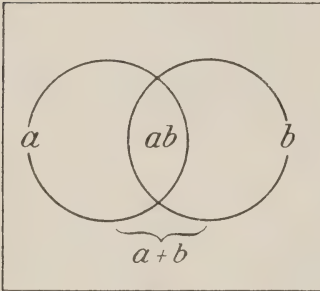


Fig. 2.

eine Fläche von der Ausdehnung Null, — oder aber ein beliebiges unter den Flächenstücken, wofern man dann als sonstige Gebiete a, b, c, \dots stets nur solche Flächen in Betracht zieht, denen diese Nullfläche als Teil angehört.

Im Hinblick auf die Axiome *VI* wird man weiter — Fig. 2 — das den beiden beliebigen kreisförmigen Flächengebieten a und b gemeinsame (in der Fig. 2 nicht kreisförmige) Flächenstück als deren Produkt ab ansprechen, als ihre Summe $a + b$ dagegen die aus a und b sich zusammensetzende Fläche.

Besitzen zwei Gebiete a und b keine gemeinsame Teilfläche (bzw. außer der jedem Gebiet eingeordneten Nullfläche), so ist Null deren Produkt:

$$ab = 0.$$

Solche zwei Gebiete heißen dann „disjunkt“, und die Gleichung $ab = 0$ eine „Disjunktion“.

Setzen zwei Gebiete a und b (mit oder bzw. ohne gemeinsames Flächenstück) das gesamte Einsgebiet zusammen, so ist dieses ihre Summe:

$$a + b = 1.$$

Zwei Gebiete, deren Summe das Einsgebiet ist, sollen „komplementäre“ Gebiete heißen.

Zwei zueinander gleichzeitig disjunkte und komplementäre Gebiete a und b

$$(ab = 0)(a + b = 1)$$

mögen ferner als „obverse“ Gebiete bezeichnet werden.*) Das eine a von beiden ist dann das, was von der gesamten Einsfläche nicht zum anderen b gehört und übrigbleibt, wenn man b aus dem Einsgebiet fortläßt, — wobei allerdings die Nullfläche, falls vorhanden, nicht fortgelassen werden darf.

Betrachtet man nun von zwei obversen Gebieten das eine als Negat des anderen, so ist damit den Axiomen VII Rechnung getragen, wie allerdings erst aus §§ 59 und 60 zu ersehen sein wird.

Wie die Axiome, so lassen sich auch alle Theoreme und abgeleiteten Begriffe der Gebietetheorie stets an den hier betrachteten Flächenfiguren erläutern und nachweisen. In häufigen Fällen kann der Anblick der Figuren auch zur vorläufigen Auffindung neuer Gebietstheoreme führen.

Deduktion der Theorie.

Schlüsse aus den drei ersten Axiomen.

§ 33. **Symmetrie der Gleichheit.** Die Eigenschaften der Reflexivität und der Transitivität, die das Wesen der Subsumtion ausmachen, werden auch der Gleichheitsbeziehung zukommen, wogegen sich diese von jener durch die Symmetrie unterscheidet.

Um zunächst die letztere zu beweisen, sei etwa die Gleichung

$$b = a$$

vorausgesetzt. Aus derselben folgt nach dem Teilaxiom III''' § 27 $a \in b$, und ebenso nach Axiom III'' $b \in a$,

$$(b = a) \underset{III'''}{\in} (a \in b), \quad (b = a) \underset{III''}{\in} (b \in a),$$

endlich aus beiden Konklusionen in dieser Reihenfolge nach III' $a = b$. Also — § 12 (2) —

$$1) \quad (b = a) \in (a = b) \quad \text{oder} \quad (b = a) = (a = b)$$

— vgl. §§ 14 und 15 —.

Man kann auch einfach, in Erinnerung an die Kommutativität des Aussagenprodukts — § 18 (10) — und an die Symmetrie und Tran-

*) Der Ausdruck „obvers“ ist einer Abhandlung von Kempe entnommen: On the relation between the logical theory of classes and the geometrical theory of points. — Proceed. Lond. Math. Soc. Vol. 21, p. 147. — Vgl. über diese Abhandlung: Schröder, Vorlesungen über die Algebra der Logik, Band II, 2, Seite 564 ff.

sitivität der Aussagengleichheit — § 15 (6) und (7) — den ganzen Beweis darstellen in der kurzen Form

$$(b = a) \underset{III}{=} (b \not\Leftarrow a) (a \not\Leftarrow b) = (a \not\Leftarrow b) (b \not\Leftarrow a) \underset{III}{=} (a = b).$$

§ 34. **Reflexivität.** Gibt man in *III'* dem allgemeinen Symbol b den nämlichen Wert wie dem Symbol a und ersetzt demgemäß jenes Symbol b durch a , so lauten die Prämissen beide übereinstimmend $a \not\Leftarrow a$ und sind nach Axiom *I* erfüllt, und darum desgleichen in

$$(a \not\Leftarrow a) \underset{I}{(a \not\Leftarrow a)} \underset{III'}{\Leftarrow} (a = a)$$

auch die Konklusion

$$2) \quad \therefore a = a,$$

— vgl. § 17 —.

Eine Gleichung, deren beide Glieder wie im Theorem 2) gleich lauten oder zeichenidentisch sind — § 2 und unten § 37 —, heiße eine „tautologische Gleichung“ oder eine „Tautologie“ — vgl. § 25 —, das Theorem 2) selbst aber der erste oder der „Gleichungs-Tautologiesatz“

§ 35. Die Transitivität der Gebietegleichheit

$$3) \quad (a = b) (b = c) \Leftarrow (a = c)$$

ergibt sich, wenn man statt der vollständigen Prämissen $a = b$ und $b = c$ zunächst nur die nach *III''* darin enthaltenen Teilprämissen $a \not\Leftarrow b$ und $b \not\Leftarrow c$ zu einem Subsumtionsschluß nach *II* auf die Konklusion $a \not\Leftarrow c$ vereinigt, und ebenso die anderen Teilvoraussetzungen $c \not\Leftarrow b$ und $b \not\Leftarrow a$ nach *III'''* zu dem Schluß auf $c \not\Leftarrow a$ nach *II*, worauf endlich die beiden Konklusionen nach *III'* zu der weiteren $a = c$ führen.

In kurzer Darstellung — § 18 (12), (10) und (11), § 12 (3) u. a.

$$\begin{aligned} (a = b) (b = c) &\underset{III}{=} (a \not\Leftarrow b) (b \not\Leftarrow a) (b \not\Leftarrow c) (c \not\Leftarrow b) = \\ &= (a \not\Leftarrow b) (b \not\Leftarrow c) (c \not\Leftarrow b) (b \not\Leftarrow a) \underset{II}{\Leftarrow} (a \not\Leftarrow c) (c \not\Leftarrow a) \underset{III}{=} (a = c). \end{aligned}$$

§ 36. **Vertauschung gleicher Prädikate bzw. Subjekte.** Dem Transitivitätssatz ähnlich sind noch die beiden anderen Theoreme: Von zwei gleichen Gebieten

$b_1 = b$ sei dem einen b_1 ein drittes Gebiet a eingeordnet, $a \not\Leftarrow b_1$; dann ist a auch dem anderen b eingeordnet,

$a = a_1$ sei das eine a_1 einem dritten Gebiet b eingeordnet, $a_1 \not\Leftarrow b$; dann ist auch das andere a eingeordnet demselben Gebiet b ,

$$4)_x \quad (a \not\Leftarrow b_1) (b_1 = b) \Leftarrow (a \not\Leftarrow b)$$

$$4)_+ \quad (a = a_1) (a_1 \not\Leftarrow b) \Leftarrow (a \not\Leftarrow b),$$

oder: in einer Subsumtion darf man stets

das Prädikat

das Subjekt

ersetzen durch ein demselben gleiches Gebiet; die Subsumtion bleibt richtig, wofern sie zuvor richtig war.

Denn aus der vorausgesetzten Gleichung folgt nach *III''* die entsprechende Einordnung

$$(b_1 = b) \underset{III''}{\Leftarrow} (b_1 \Leftarrow b) \quad | \quad (a = a_1) \underset{III''}{\Leftarrow} (a \Leftarrow a_1),$$

und aus dieser Konklusion in Verbindung mit der anderen Prämisse vermöge *II*

$$(a \Leftarrow b_1) (b_1 \Leftarrow b) \underset{II}{\Leftarrow} (a \Leftarrow b) \quad | \quad (a \Leftarrow a_1) (a_1 \Leftarrow b) \underset{II}{\Leftarrow} (a \Leftarrow b).$$

Beide Sätze 4)_x und 4)₊ sind vereinigt in dem weiteren Theoreme

$$(a = a_1) (a_1 \Leftarrow b_1) (b_1 = b) \Leftarrow (a \Leftarrow b),$$

in kurz andeutender Darstellung

$$a = a_1 \Leftarrow b_1 = b,$$

wozu der Beweis auch lauten kann:

$$(a = a_1) (a_1 \Leftarrow b_1) (b_1 = b) \underset{III''}{\Leftarrow} (a \Leftarrow a_1) (a_1 \Leftarrow b_1) (b_1 \Leftarrow b) \underset{II}{\Leftarrow} (a \Leftarrow b),$$

mit Benutzung der Sätze § 12 (3), § 16 (8)', § 13 (4).

§ 37. **Gleichheit als immanente Identität.** Den bisherigen Sätzen von der Vertauschbarkeit gleicher Gebiete als Gleichungsglieder — Theorem 3) — und als Subsumtionsglieder — Theorem 4)_x und 4)₊ — werden sich in der Folge noch weitere anreihen, wonach gleiche Gebiete in Propositionen auch stets für einander eintreten können als Faktoren in Produkten — Theorem 16)_x und 19)_x §§ 49 und 50 —, als Summanden in Summen — Theorem 16)₊ und 19)₊ — und als Neganden — Theorem 22) § 55 —, kurz in allen vorkommenden und erdenklichen Fällen, — als ob gleiche Gebiete identisch wären, wie etwa in dem Flächengebietesystem des § 32. Ihrem Auftreten als Gebiete nach sind sie in der Tat von identischen nicht zu unterscheiden; als *Gebiete* des vorliegenden Systems sind *gleiche Gebiete* ein und dasselbe Gebiet, mögen sie auch in irgendeiner anderen Hinsicht als verschiedene *Dinge* erscheinen; sie sind, wie wir sagen wollen, gebietsidentisch oder „immanent identisch“, — ihre Symbole sind „immanent gleich- oder eindeutig“, im Gegensatz zu den von vornherein schlechthin identischen Gebieten und Zeichen, d. i. den verschiedenen Zeichen für ein und dasselbe Ding — § 2 —, die etwa auch „zeichenidentisch“

heißen können, — ein Gegensatz freilich, der nur von Belang werden kann bei Anwendung oder Ausdeutung einer Gebietetheorie in einem „Denkbereich“ von Dingen, und zwar von Dingen anderer Art als die Flächengebiete des § 32. — Ein Beispiel solcher Anwendung wird der Propositionenkalkül — §§ 76 ff. — darbieten. — Bei allgemeiner abstrakter Behandlung der Gebietetheorie kann von Identität und Eindeutigkeit nur im immanenten Sinn die Rede sein.

Sätze über Null und Eins.

Schlüsse aus den Axiomen I—V.

§ 38. **Spezielle Theoreme.** Von den Gebieten 0 und 1 gilt selbstverständlich alles, was für die Gebiete überhaupt durch die Axiome festgesetzt ist, z. B. durch das Axiom I (und auch durch IV_x und IV_+)

$$0 \notin 0, \quad 1 \notin 1,$$

und außerdem durch IV_x und durch IV_+

$$0 \notin 1,$$

— sowie auch alles, was als Theorem aus den Axiomen gefolgert wird, z. B. der Tautologiesatz 2)

$$0 = 0, \quad 1 = 1.$$

Ferner folgt aus V in Verbindung mit III

$$0 \neq 1,$$

da man andernfalls — mit Rücksicht auf die Zugehörigkeit der Gleichheitsbeziehung zum System — §§ 27 und 21 — aus $0 = 1$ nach III''' auf $1 \notin 0$ schließen könnte, im Widerspruch mit V .

§ 39. **Eindeutigkeit.** Andererseits unterscheiden sich diese beiden Gebiete 0 und 1 infolge der Axiome IV und V wesentlich von allen andern: Sollten etwa mehrere Gebiete 0 vorhanden sein, so wären dieselben alle einander gleich, — und desgleichen auch alle etwaigen Einsen unter sich. —

Denn jede Null, z. B. $0'$, muß nach IV_x eingeordnet sein einem jeden Gebiet, also auch jeder andern Null $0''$, für welche letztere aber dasselbe gilt,

$$(0' \notin_{IV_x} 0'') (0'' \notin_{IV_x} 0') = (0' = 0'') \quad III$$

Es gibt also — im immanenten Sinn, § 37 — im System nur ein einziges Nullgebiet 0, und ebenso nur ein Einsgebiet 1; 0 und 1 sind eindeutige oder spezielle Symbole.

§ 40. **Null als Prädikat, Eins als Subjekt.** Weiß man daher von irgendeinem Gebiet p bzw. q , daß es dem Nullgebiet eingeordnet ist, | daß demselben das Einsgebiet eingeordnet ist,

$$p \notin 0, \quad | \quad 1 \notin q,$$

so kann ein solches Gebiet nur eine Null bzw. Eins sein;

$$\begin{array}{l|l} (p \notin 0) \underset{(e)}{=} (p \notin 0)(0 \notin p) \underset{IV_x}{=} (p = 0) & (1 \notin q) \underset{(e)}{=} (1 \notin q)(q \notin 1) \underset{IV_+}{=} (1 = q) \\ 5)_x \quad \therefore (p \notin 0) = (p = 0). & 5)_+ \quad \therefore (1 \notin q) = (1 = q). \end{array}$$

Man kann in diesen Theoremen einen einfachen Zeichenausdruck für die auch schon im vorigen § 39 erwiesene Eindeutigkeit der Gebiete 0 und 1 erblicken und deshalb die Benennung „Eindeutigkeitsätze“ gebrauchen.

Multiplikation und Addition.

Schlüsse aus den Axiomen I—VI.

§ 41. **Das Produkt als Subjekt, die Summe als Prädikat.** Auch das Gebieteprodukt ab und die Gebietesumme $a + b$ sind Gebiete, die wie andere den Axiomen und Theoremen unterliegen, z. B. dem Axiom I; daraus ergibt sich aber

$$\begin{array}{l|l} (ab \notin ab) \underset{I}{\notin} (ab \notin a) \underset{VI_x''}{\notin} & (a + b \notin a + b) \underset{I}{\notin} (a \notin a + b) \underset{VI_+''}{\notin} \\ (ab \notin ab) \underset{I}{\notin} (ab \notin b) \underset{VI_x'''}{\notin} & (a + b \notin a + b) \underset{I}{\notin} (b \notin a + b) \underset{VI_+'''}{\notin} \\ 6)_x \quad \therefore ab \notin a, \quad ab \notin b. & 6)_+ \quad \therefore a \notin a + b, \quad b \notin a + b. \end{array}$$

§ 42. **Eindeutigkeit.** Daß Produkt und Summe zweier Gebiete durch diese (immanent) eindeutig bestimmt sind, läßt sich ähnlich wie für 0 und 1 in § 39 nachweisen. Wäre nämlich — um den Beweis nur für das Produkt ab durchzuführen — $(ab)'$ neben ab ein zweiter Wert des Produktes von a und b , so hätte man — § 18 (12), § 15 (7) —

$$\begin{aligned} \{(ab)' \notin a\} \underset{6)_x}{\{ (ab)' \notin b\}} \underset{6)_x}{\{ ab \notin a\}} \underset{6)_x}{\{ ab \notin b\}} &= \{(ab)' \notin ab\} \underset{VI_x}{\{ ab \notin (ab)'\}} = \\ &= \{(ab)' = ab\} \underset{III}{\quad} \quad \therefore (ab)' = ab. \end{aligned}$$

§ 43. **Kommutativität.** Als solcher zweiter Produktwert $(ab)'$ kann etwa das Produkt ba , mit vertauschten Faktoren, gelten, das einer Um-

stellung der Prämissen in VI'_x entspricht. — Man erhält so die „Kommutationssätze“ der Multiplikation und desgleichen der Addition

$$7)_x \quad ab = ba \quad | \quad 7)_+ \quad b + a = a + b.$$

Beweis für $7)_x$, wie oben,

$$(ab \in b) \underset{6)_x}{(ab \in a)} \underset{6)_x}{(ba \in a)} \underset{6)_x}{(ba \in b)} \underset{VI_x}{=} (ab \in ba) \underset{III}{(ba \in ab)} = (ab = ba).$$

§ 44. **Assoziativität.** Zum Beweise der Assoziationsätze

$$8)_x \quad a(bc) = (ab)c = abc \quad | \quad 8)_+ \quad (a+b)+c = a+(b+c) = a+b+c$$

sind als Hilfssätze zunächst die Teilsubsumtionen herzuleiten, aus denen die Gleichungen nach III sich zusammensetzen, — z. B. für den Multiplikationssatz $8)_x$ — § 12 (3), § 16 (5)', § 13 (4) —

$$\begin{aligned} & [\{ a(bc) \in a \} \{ a(bc) \in bc \in b \}] \{ a(bc) \in bc \in c \} \in \\ & \quad \underset{6)_x}{\in} \{ a(bc) \in ab \} \{ a(bc) \in c \} = \{ a(bc) \in (ab)c \} \\ & \quad \underset{II \quad VI_x}{\in} \\ & \{ (ab)c \in ab \in a \} [\{ (ab)c \in ab \in b \} \{ (ab)c \in c \}] \in \\ & \quad \in \{ (ab)c \in a \} \{ (ab)c \in bc \} = \{ (ab)c \in a(bc) \}. \end{aligned}$$

Multiplikation und Addition von Gebieten sind also kommutative und assoziative Operationen, wie die gleichnamigen Zahlenrechnungsarten, und man kann wie bei diesen von Produkten und Summen mit drei und mehr Operanden — Faktoren bzw. Summanden sprechen.

Klammern — vgl. §§ 10 und 30, auch zu § 18 — sind hiernach nicht nötig, wenn ein Produkt als Faktor, und wenn eine Summe als Summand erscheint.

§ 45. **Äquivalenz zwischen Subsumtion und Gleichung.** Von vielfachem Gebrauche ist die folgende Äquivalenz dreier Subsumtionen

$$9)'_x \quad (a \in ab) = (a \in b) \quad | \quad 9)'_+ \quad (a \in b) = (a + b \in b),$$

von denen die erste und die letzte sich mit ihren nach $6)_{x+}$ ohnehin gültigen Umkehrungen auch vermöge III in Gleichungen zusammenziehen können — § 17 (ϵ) —

$$9)_{x+} \quad (a = ab) = (a \in b) = (a + b = b).$$

Beweis von $9)'_{x+}$:

$$(a \in ab) \underset{VI_x}{=} (a \in a) \underset{I}{(a \in b)} \underset{(\epsilon)}{=} (a \in b) \underset{(\epsilon)}{=} (a \in b) \underset{I}{(b \in b)} \underset{VI_+}{=} (a + b \in b)$$

§ 46. **Umformung einer Gleichung.** Auch eine Gleichung $a = b$ gestattet äquivalente Umformungen in ähnlicher Weise: Durch überschiebende Multiplikation — § 18 (12) — der obigen Sekundäräquivalenz $9)_{x+}'$ mit der andern

$$(b \notin ab) = (b \notin a) = (a + b \notin a),$$

die nach eben diesem Theorem $9)_{x+}'$ gleichfalls gilt, erhält man unter Anwendung von VI_x und VI_+ leicht

$$10) \quad (a = b) = (a + b \notin ab) = (a + b = ab).$$

Man kann auch diesem Theorem den Satz

$$(a \notin c) (b \notin c) (a \notin d) (b \notin d) = (a + b \notin cd)$$

vorausschicken, der sich leicht ergibt durch Anwendung der Axiome VI_+ und VI_x nacheinander, und der beide gewissermaßen in sich vereinigt; setzt man hierin a für c und b für d , so gelangt man zu Theorem 10) — mit Rücksicht auf I und (ε) § 17 —.

§ 47. **Tautologie- und Absorptionssätze.** Vermöge der Theoreme $9)_{x+}$ kann man eine Subsumtion auf zwei verschiedene Arten in eine Gleichung „umwandeln“. Durch solche Umwandlung gewinnt man aus den Axiomen I und IV_{x+} , sowie aus den Theoremen $6)_{x+}$ bzw. die folgenden neuen Sätze:

11) _x	$aa = a$	11) ₊	$a = a + a$
12) _x	$\begin{cases} a \cdot 0 = 0 \\ a \cdot 1 = a \end{cases}$	12) ₊	$\begin{cases} 1 = 1 + a \\ a = 0 + a \end{cases}$
13) _x	$a(a + b) = a.$	13) ₊	$a = a + ab.$

Andere Beweise für diese Theoreme, unabhängig von $9)_{x+}$ liegen nahe. — Übrigens lassen auch sonst die hier gegebenen Beweise vielfach Abänderungen zu.

Die Sätze $11)_{x+}$ heißen auch „Tautologiesätze“, nämlich die Sätze vom „tautologischen Produkt“ aa und bzw. von der „tautologischen Summe“ $a + a$ — vgl. das Axiom I § 25 und das Theorem 2) § 34 —, während die Theoreme $13)_{x+}$ den Namen „Absorptionsgesetze“ führen: Es werden z. B. nach $13)_{+}$ in einer Summe wie $a + ab$ diejenigen Glieder — ab —, in denen andere Glieder — a — als Faktoren enthalten sind, von diesen „absorbiert“, d. h. können wegfallen oder auch nach Belieben hinzutreten ohne Wertänderung der Summe.

So enthalten die Sätze $11) - 13)$ gewisse Rechenregeln, die zur Vereinfachung und Erweiterung gegebener Gebietsausdrücke dienen

können und übrigens nur zum Teil mit den arithmetischen Rechengesetzen übereinstimmen. Man hat beispielsweise

$$abbcaacd = abcd$$

$$abc(b+c) + (cd+def+a)a = a$$

$$a(b+c) + b+c+d + (b+c)c = b+c+d.$$

Weitere Rechenexempel folgen unter § 69.

Wer etwa — infolge einer vom Rechnen mit Zahlen herrührenden Gewohnheit — zum Beweis der Theoreme 13)_{x+} oder anstelle der Anwendung dieser Theoreme — hier schon Gebrauch machen wollte von „distributiver“ Multiplikation einer Summe oder umgekehrt vom „Ausscheiden“ eines gemeinsamen Faktors von Summengliedern — nach einem „Distributionsgesetz“ des Inhalts

$$\Delta) \quad a(b+c) = ab+ac$$

— vgl. unten Theorem 32)_x § 66 —, sei einstweilen verwiesen auf Schröder, Vorlesungen über die Algebra der Logik, I, S. 617 ff. und II, 2, S. 409 ff., wo gezeigt wird, daß dieses Gesetz Δ) sich aus unseren Axiomen nicht ohne Hilfe des „Distributionsaxioms“ VII herleiten läßt.)*

§ 48. **Das Eins-Produkt und die Null-Summe.** Die Theoreme 12)_{x+} regeln das Rechnen mit den Gebieten 0 und 1. Das erste Theorempaar besagt:

Das Nullgebiet ist disjunkt | Das Einsgebiet ist komplementär

— § 32 — zu jedem beliebigen andern Gebiet und zu sich selbst. — Die beiden andern lehren unter anderm, daß im Gebietekalkül ein Produkt erst dann = 1 wird, wenn jeder Faktor einzeln = 1 ist, und daß, wenn eine Summe = 0 werden oder, wie man in Anlehnung an die arithmetische Ausdrucksweise auch sagt, „verschwinden“ soll, dann die Summanden alle einzeln verschwinden müssen. Man hat hiefür in besonderer Darstellung:

$$\begin{array}{l|l}
 (1 = ab) = (1 \notin ab) = & (a+b=0) = (a+b \notin 0) = \\
 \begin{array}{l}
 \stackrel{5)_+}{=} (1 \notin a) (1 \notin b) = \\
 VI_x \\
 = (1 = a) (1 = b) \\
 \stackrel{5)_+}{=}
 \end{array} & \begin{array}{l}
 \stackrel{5)_x}{=} (a \notin 0) (b \notin 0) = \\
 VI_+ \\
 = (a = 0) (b = 0) \\
 \stackrel{5)_x}{=}
 \end{array} \\
 14)_x \quad \therefore (1 = ab) = (1 = a) (1 = b). & 14)_+ \quad \therefore (a+b=0) = (a=0) (b=0).
 \end{array}$$

*) Der Herausgeber beabsichtigt, eine Bearbeitung der Axiomatik der Gebiete-theorie mit Berücksichtigung der bemerkenswerten Untersuchungen von Huntington, besonders in „Sets of independent Postulates for the Algebra of Logic“, Americ. Math. Soc., Vol. 5, p. 288 ff., demnächst zu veröffentlichen.

§ 49. **Beiderseitige Multiplikation und Addition.** Gewissen Sätzen aus der Größenlehre entsprechen die Gebietstheoreme: Zwei eingeordnete oder gleiche Gebiete bleiben eingeordnet bzw. gleich, wenn man beiden ein und dasselbe beliebige Gebiet multiplikativ oder additiv beifügt;

$$\begin{array}{l|l}
 15)_x & (a \notin b) \notin (ac \notin bc) \\
 16)_x & (a = b) \notin (ac = bc)
 \end{array}
 \quad \left| \quad
 \begin{array}{l}
 15)_+ & (a \notin b) \notin (a + c \notin b + c) \\
 16)_+ & (a = b) \notin (a + c = b + c).
 \end{array}$$

Beweise von 15)_x +:

$$\begin{array}{l|l}
 (a \notin b) = & (a \notin b) = \\
 = (ac \notin a) (a \notin b) (ac \notin c) & = (a \notin b) (b \notin b + c) (c \notin b + c) \\
 \text{\scriptsize (e)} \quad \text{\scriptsize 6)_x} \quad \text{\scriptsize 6)_x} & \text{\scriptsize (e)} \quad \text{\scriptsize 6)_+} \quad \text{\scriptsize 6)_+} \\
 \notin (ac \notin b) (ac \notin c) & \notin (a \notin b + c) (c \notin b + c) \\
 \text{\scriptsize II} & \text{\scriptsize II} \\
 = (ac \notin bc) & = (a + c \notin b + c). \\
 \text{\scriptsize VI}_x & \text{\scriptsize VI}_+
 \end{array}$$

Beweis von 16)_x:

$$(a = b) = (a \notin b) (b \notin a) \notin (ac \notin bc) (bc \notin ac) = (ac = bc).$$

\scriptsize III
 \scriptsize 15)_x
 \scriptsize III

Bemerkt sei noch, daß im Gegensatz zu analogen Zahlentheoremen, wonach z. B. bei positiven Zahlen a, b, c

$$(a \leq b) = (ac \leq bc)$$

gilt — vgl. § 15 —, die vorstehenden Gebietstheoreme nicht umkehrbar sind: In der beistehenden Figur 3, wo a, b, c drei Kreisflächen sind, ist ac , die kleine Zweieckfläche PQ , ein Teil des größeren Zweiecks bc oder RS , $ac \notin bc$, ohne daß $a \notin b$ wäre.

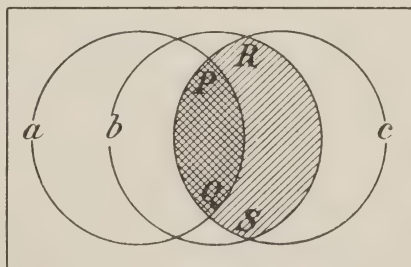


Fig. 3.

§ 50. **Überschiebende Multiplikation und Addition.** Gleichfalls an die Größenlehre erinnern die Sätze von der „überschiebenden Multiplikation und Addition“ für Subsumtionen und Gleichungen — vgl. §§ 12 und 18 —: Eingeordnetes oder Gleiches, mit Eingeordnetem multipliziert oder zu Eingeordnetem addiert, ergibt Eingeordnetes; und Gleiches, mit Gleichem multipliziert oder zu Gleichem addiert, gibt Gleiches;

$$\begin{array}{l|l}
 17)_x (a \notin b) (c \notin d) \notin (ac \notin bd) & 17)_+ (a \notin b) (c \notin d) \notin (a+c \notin b+d) \\
 18)_x (a \notin b) (c = d) \notin (ac \notin bd) & 18)_+ (a \notin b) (c = d) \notin (a+c \notin b+d) \\
 19)_x (a = b) (c = d) \notin (ac = bd) & 19)_+ (a = b) (c = d) \notin (a+c = b+d).
 \end{array}$$

Von diesen Theoremen lassen sich offenbar die beiden letzten Paare auf das erste $17)_{x+}$ stützen, und zwar $18)_{x+}$ vermöge der Subsumtion

$$(a \notin b) (c = d) \notin_{III''} (a \notin b) (c \notin d),$$

$19)_{x+}$ aber ganz wie oben $16)_x$ § 49 auf $15)_x$ zurückgeführt wurde; auf $15)_{x+}$ geht übrigens auch $17)_{x+}$ zurück; z. B. $17)_x$

$$(a \notin b) (c \notin d) \notin_{15)_x} (ac \notin bc) (bc \notin bd) \notin_{II} (ac \notin bd).$$

Die Sätze $16)_{x+}$ und $19)_{x+}$ behaupten die Vertauschbarkeit gleicher Gebiete als Faktoren und als Summanden — § 37 —.

Sätze über Negation und Distribution.

Schlüsse aus VII und den übrigen Axiomen.

§ 51. **Die erste Distributionssubsumtion.** Die Negations- oder Distributionsaxiome $VII)_{x+}$

$$(a + z) (\bar{a} + z) = z = az + \bar{a}z$$

werden sich, sowie übrigens auch die Theoreme $13)_{x+}$ § 47, als besondere Fälle des „Distributionsgesetzes“ \mathcal{A} — vgl. auch oben § 47, sowie Theorem $32)_x$ § 66 —

$$\mathcal{A} \quad a(b + c) = ab + ac$$

zu erkennen geben.

Indessen folgt schon aus den früheren Axiomen

$$\underbrace{(z \notin a + z)}_{6)_+} \underbrace{(z \notin \bar{a} + z)}_{6)_+} = \underbrace{\{z \notin (a + z) (\bar{a} + z)\}}_{VI_x} \quad | \quad \underbrace{(az \notin z)}_{6)_x} \underbrace{(\bar{a}z \notin z)}_{6)_x} = \underbrace{(az + \bar{a}z \notin z)}_{VI_+}$$

$$VII'_x \quad \therefore az + \bar{a}z \notin z \notin (a + z) (\bar{a} + z),$$

sowie ferner

$$\underbrace{(ab \notin a)}_{6)_x} \underbrace{(ab \notin b)}_{6)_x} \underbrace{\notin b + c)}_{6)_+} \underbrace{(ac \notin a)}_{6)_x} \underbrace{(ac \notin c)}_{6)_x} \underbrace{\notin b + c)}_{6)_+} \notin$$

$$\notin_{II VI_x} \{ab \notin a(b + c)\} \{ac \notin a(b + c)\} =_{VI_+} \{ab + ac \notin a(b + c)\}$$

$$\mathcal{A}' \quad \therefore ab + ac \notin a(b + c),$$

die „erste Subsumtion des Distributionssatzes“. Es bleibt somit nur noch die zweite umgekehrte Distributionssubsumtion \mathcal{A})“ zu erweisen, und man hat hiezu zur Verfügung als neue besondere Voraussetzung anstelle der Gleichungen VII_{x+} lediglich die Teilsubsumtionen

$$VII_{x+}'' \quad (a + z) (\bar{a} + z) \notin z \notin az + \bar{a}z.$$

Für den Gebrauch sind die Voraussetzungen in der Gleichungenform am besten geeignet.

§ 52. Disjunkt-komplementäres Gebiet. Vermöge der Axiome VII_{x+} ist zu jedem Gebiet a ein anderes \bar{a} „ a nicht“, „non a “ oder „ a Strich“, Negat oder Verneinung von a , postuliert und — wie sich in § 53 zeigen wird — eindeutig bestimmt als zu a disjunktes und zugleich komplementäres Gebiet — vgl. § 32 —.

Zur Bestätigung der genannten Eigenschaften gibt man in VII_{x+} dem allgemeinen Symbol z die Werte 0 und 1:

$$\begin{array}{l|l} (a+0)(\bar{a}+0) = a\bar{a} = 0 & 1 = a \cdot 1 + \bar{a} \cdot 1 = a + \bar{a} \\ \text{12)+19)x} & \text{VII}_+ & \text{12)x 19)+} \\ \text{20)x} & \therefore a\bar{a} = 0 & \text{20)+} & \therefore 1 = a + \bar{a}. \end{array}$$

§ 53. Die Eindeutigkeit der Negation oder die Gleichheit zweier etwaiger Negate \bar{a} und \bar{a}' eines Gebietes a — vgl. § 39 und 42 — läßt sich wie folgt beweisen.

$$\begin{aligned} \bar{a}\bar{a}' = 0 + \bar{a}\bar{a}' &= a\bar{a}' + \bar{a}\bar{a}' = \bar{a}' = (a + \bar{a}')(\bar{a} + \bar{a}') = 1 \cdot (\bar{a} + \bar{a}') = \bar{a} + \bar{a}' \\ \text{12)+} & \quad \text{20)x 16)+} & \quad \text{VII}_+ & \quad \text{VII}_x & & \quad \text{20)+16)x} & & \quad \text{12)x} \\ & & & & & & \therefore \bar{a}\bar{a}' = \bar{a} + \bar{a}', \end{aligned}$$

oder nach 10):

$$\bar{a} = \bar{a}'.$$

D. h. würden mit einem Gebiet a zusammen etwa zwei (oder mehr) Gebiete b und c , an Stelle von \bar{a} in die Gleichungen VII_{x+} eingesetzt, diesen genügen bei beliebigem Wert von z , so wären diese Gebiete $b = c$ einander gleich, und ihr gemeinsamer Gebietswert heißt das Negat \bar{a} von a ;

$$\{(a+z)(b+z) = z = az + bz\} \{(a+z)(c+z) = z = az + cz\} \notin (b=c=\bar{a})$$

Um den Satz auch in dieser Gestalt noch besonders zu beweisen, kann man zunächst in das Prämissenprodukt für z die Werte 0 und 1, wie im vorigen § 52, und sodann noch den Wert b (oder c) einsetzen. Es ergibt dann der Wert

$$z = 0: \quad ab = ac = 0 \quad | \quad z = 1: \quad 1 = a + b = a + c,$$

entsprechend den Theoremen 20)_{x+}, während der Wert b für z in der zweiten Doppelprämisse

$$(a + b)(c + b) = b = ab + cb$$

mit Rücksicht auf die schon ermittelten Werte $a + b = 1$ und $ab = 0$ ähnlich wie oben

$$c + b = b = cb,$$

oder endlich $c = b$ richtig liefert — als Spezialisierungskonklusion der Prämissen.

§ 54. **Doppelte Negation.** Hieraus und aus der Symmetrie der Axiome VII_{x+} in bezug auf die beiden Gebiete a und \bar{a} — eine Vertauschung beider bewirkt keine Änderung der Axiome — ergibt sich, daß das Negat $\bar{\bar{a}}$ von \bar{a} wieder mit a zusammenfällt:

$$(\bar{a} + z)(a + z) = z = \bar{a}z + az$$

bedeutet auch nach dem am Schluß des vorigen § 53 Bemerkten, daß a das Negat von \bar{a} ist,

$$21) \quad \bar{\bar{a}} = a.$$

Ebenso $\bar{\bar{a}} = \bar{a}$, usw.

§ 55. **Kontraposition von Gleichungen.** Zwei gleiche Gebiete a und b , $a = b$, die nach 4)_{x+} die nämlichen Unter- und Obergebiete, sowie nach 16)_{x+} und 19)_{x+} gleiche Produkte und Summen mit einem dritten oder bzw. mit zwei anderen gleichen Gebieten besitzen, haben endlich auch gleiche Negate — vgl. § 37 —:

$$(a = b) \Leftarrow$$

$$z = \underset{VII_x}{(a + z)} \underset{16)_{x+}}{(\bar{a} + z)} = \underset{16)_{x+}}{(b + z)} \underset{16)_{x+}}{(\bar{a} + z)} \quad | \quad z = \underset{VII_x}{az} + \underset{16)_{x+}}{\bar{a}z} = \underset{16)_{x+}}{bz} + \bar{a}z,$$

womit nach dem Eindeutigkeitssatz § 53 das Gebiet \bar{a} auch Negat von b ist,

$$(a = b) \Leftarrow (\bar{a} = \bar{b}).$$

Hier wird aber das sekundäre \Leftarrow Zeichen in $=$ verwandelt werden dürfen, da nach eben diesem Satz auch umgekehrt

$$(\bar{a} = \bar{b}) \Leftarrow \underset{21)}{(a = \bar{\bar{a}} = \bar{\bar{b}} = b)}$$

gilt, — somit nach III

$$22) \quad (a = b) = (\bar{a} = \bar{b}).$$

Die eine dieser beiden äquivalenten Primärgleichungen heißt auch „Kontraposition“ der anderen.

§ 56. **Obverse Gebiete.** Dieses Kontrapositionstheorem läßt in der Gestalt

$$22)' \quad (\bar{a} = b) = (\bar{b} = a)$$

die Symmetrie der Beziehung zwischen einem Gebiete a und dessen Negat b besonders hervortreten; man bezeichnet die beiden Gebiete a und b oder \bar{a} als zueinander „obverse“ — vgl. § 32 —.

Speziell sind 0 und 1 obvers,

$$23) \quad \bar{0} = 1, \quad \bar{1} = 0,$$

da die Axiome VII_{x+} erfüllt sind, wenn man darin 0 für a und 1 für \bar{a} einführt:

$$(0 + z)(1 + z) = z \cdot 1 = z, \quad 0 \cdot z + 1 \cdot z = 0 + z = z.$$

$\frac{12)_+ 19)_x}{12)_x}$
 $\frac{12)_x 19)_+}{12)_+}$

§ 57. **Null- und Einsform für Subsumtionen.** Die folgenden Theoreme können zu Umformungen von Subsumtionen und Gleichungen dienen in ähnlicher Weise wie die Theoreme $9)_{x+}$ § 45.

$$(a \Leftarrow b) \Leftarrow$$

$$\begin{array}{l|l} \Leftarrow (a\bar{b} \Leftarrow b\bar{b} = 0) \Leftarrow (a\bar{b} = 0) & \Leftarrow (a + \bar{a} = 1 \Leftarrow \bar{a} + b) \Leftarrow (1 = \bar{a} + b) \\ \frac{15)_x}{20)_x \quad 4)_5)_x} & \frac{15)_+}{20)_+ \quad 4)_5)_+} \\ \therefore (a \Leftarrow b) \Leftarrow (a\bar{b} = 0) & \therefore (a \Leftarrow b) \Leftarrow (1 = \bar{a} + b) \end{array}$$

Die Umkehrung dieser Subsumtionen ergibt sich — nebst den nach III dann entstehenden Äquivalenzen $24)_{x+}$ — wie folgt.

$$\begin{array}{l|l} (a\bar{b} = 0) \Leftarrow & (1 = \bar{a} + b) \Leftarrow \\ \Leftarrow (a = ab + a\bar{b} = ab + 0 = ab) & \Leftarrow \{(a+b) \cdot 1 = a+b = (a+b)(\bar{a}+b) = b\} \\ \frac{16)_+}{VII_+} & \frac{16)_x}{12)_x} \quad \frac{VII_x}{VII_x} \\ \Leftarrow (a \Leftarrow b) & \Leftarrow (a \Leftarrow b); \\ \frac{3)_9)_x}{3)_9)_x} & \frac{9)_9)_+}{9)_9)_+} \end{array}$$

$$24)_{x+} \quad (a\bar{b} = 0) = (a \Leftarrow b) = (1 = \bar{a} + b).$$

§ 58. **Der Kontrapositionssatz für Subsumtionen**, — aus dem auch derjenige 22) für Gleichungen fließen würde, —

$$25) \quad (a \Leftarrow b) = (\bar{b} \Leftarrow \bar{a}),$$

folgt nunmehr sowohl aus $24)_x$ wie aus $24)_+$:

$$(a \Leftarrow b) = (a\bar{b} = \bar{b}\bar{a} = 0) = (\bar{b} \Leftarrow \bar{a}) \quad | \quad (a \Leftarrow b) = (1 = \bar{a} + b = \bar{\bar{b}} + \bar{\bar{a}}) = (\bar{\bar{b}} \Leftarrow \bar{\bar{a}}).$$

$\frac{24)_x}{21}$
 $\frac{24)_x}{24)_x}$
 $\frac{24)_+}{24)_+}$
 $\frac{21}{21}$
 $\frac{24)_+}{24)_+}$

§ 59. **Disjunkt-komplementär ist obvers.** Mit $24)_{x+}$ sind neue Ausdrücke gefunden dafür, daß zwei Gebiete

a und b disjunkt sind, $\left| \begin{array}{l} a \text{ und } b \text{ komplementär sind,} \\ (ab = 0) = (a \notin \bar{b}) = (b \notin \bar{a}) \quad \left| \quad (a + b = 1) = (\bar{a} \notin b) = (\bar{b} \notin a). \end{array} \right.$

Sollen daher etwa a und b sowohl disjunkt als komplementär sein, so sind sie obvers, b ist Negat zu a , und umgekehrt, — da dann $b \notin \bar{a}$ neben $\bar{a} \notin b$, also $b = \bar{a}$ wird,

$$26) \quad (ab = 0)(a + b = 1) = (\bar{a} = b) = (\bar{b} = a).$$

\bar{a} ist also schon durch die Eigenschaften $20)_{x+}$ § 52 hinreichend gekennzeichnet als Negat von a . Oder, mit Bezug auf den Schluß von § 53: Wenn ein Gebiet b an Stelle von \bar{a} mit a zusammen den Axiomen VII_{x+} nur genügt für die Werte 0 und 1 von z , so genügt b denselben auch für jeden beliebigen anderen Wert von z . — Vgl. § 126 im zweiten Teil des Abrisses.

§ 60. **Veranschaulichung der Negation.** Da hiernach die Theoreme $20)_{x+}$ — oder auch 26) — den Axiomen VII_{x+} äquivalent sind, so erhebt sich die Frage, ob es nicht angehe, anstatt VII den einfacheren und anschaulicheren Inhalt der Theoreme $20)_{x+}$ unter der Zahl der Axiome vorzusetzen, — eine Frage indessen, deren endgültige Erledigung der Axiomatik zufällt — vgl. die Note zu § 47 —.

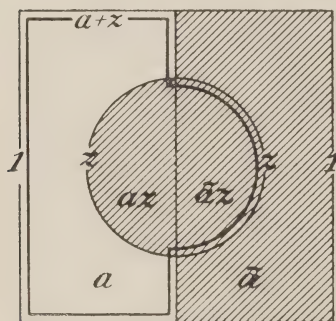


Fig. 4.

Immerhin ist auch ohne weiteres evident, daß, wie das Axiom VII_{x+} verlangt, von zwei Gebieten z und a das eine z stets aus einem mit dem anderen a gemeinsamen Teil az und einem nicht zu a gehörigen Teil $\bar{a}z$ additiv bestehen muß, wobei der eine oder andere Teil auch Null sein kann. — Für zwei Gebiete a und z derart, daß weder az noch $\bar{a}z$ — noch auch $a\bar{z}$ Null ist, sind beide Axiome VII_{x+} veranschaulicht durch die Figur 4, worin die Gesamtfläche 1 sich aus den

beiden Rechtecken a und \bar{a} zusammensetzt, die Kreisfläche z in die beiden Halbkreise az und $\bar{a}z$ zerfällt und die schraffierte Fläche $\bar{a} + z$ mit der geränderten $a + z$ den Kreis z gemein hat.

§ 61. **Null- und Einsform der Gleichungen.** Nachdem die Theoreme $24)_{x+}$, wie auch schon $9)_{x+}$, die Umwandlung einer Subsumtion in eine Gleichung lehren, jedoch $24)_{x+}$ in eine solche mit 0 und bzw. 1 als Gleichungsglied einerseits des Gleichheitszeichens, — eine

Umwandlung, durch welche z. B. aus dem Axiom *I* die Theoreme $20)_{x+}$ entstehen, — so wird sich ebenso auch eine Gleichung $a = b$ einerseits des Gleichheitszeichens „auf Null und auf Eins bringen“ lassen:

$$\begin{aligned}
 (a = b) &= (a \notin b)(b \notin a) = \\
 &= (a\bar{b} = 0)(\bar{a}b = 0) = (a\bar{b} + \bar{a}b = 0) \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} &= (1 = \bar{a} + b)(1 = a + \bar{b}) = \\ &= \{1 = (\bar{a} + b)(a + \bar{b})\} \end{aligned} \\
 24)_x & \quad \quad \quad 14)_+ & \quad \quad \quad 24)_+ & \quad \quad \quad 14)_x
 \end{aligned}$$

27)_{x+} ∴ $(a\bar{b} + \bar{a}b = 0) = (a = b) = \{1 = (\bar{a} + b)(a + \bar{b})\}.$

Hierzu wird unter § 68 noch eine Ergänzung $27)'_{x+}$ folgen.

Die der Subsumtion $a \notin b$ nach $24)_{x+}$ äquivalenten Gleichungen gehen in der Tat aus denen in $9)_{x+}$ hervor durch „Auf-Null-bringen“, — was sich allerdings erst mittels der Theoreme $31)_{x+}$ § 64 zeigen läßt.

§ 62. **Produkt- und Summenentwicklung eines Gebietes.** Bei Anwendung der Axiome *VII* bedient man sich häufig des Ausdrucks, das Gebiet z sei „nach a (und \bar{a}) entwickelt“ in ein Produkt (zweier Summen) durch $VII)_x$, in eine Summe (zweier Produkte) durch $VII)_+$. — Nun kann nach eben diesen Axiomen jedes Gebiet a auch ebenso nach zwei und mehr Gebieten b, c, \dots entwickelt werden, indem man die Entwicklungsfaktoren bzw. -summanden von a nach b ihrerseits nach c entwickelt, usw.

$$\begin{aligned}
 a &= (a + b)(a + \bar{b}) & a &= ab + a\bar{b} \\
 &= (a + b + c)(a + b + \bar{c})(a + \bar{b} + c)(a + \bar{b} + \bar{c}) & &= abc + ab\bar{c} + a\bar{b}c + a\bar{b}\bar{c} \\
 &= \dots & &= \dots
 \end{aligned}$$

Es gilt dies vor allem auch für die Gebiete 0 und 1, die in $20)_{x+}$ nach einem einzigen Gebiet a entwickelt sind,

$$\begin{aligned}
 28)_x \quad 0 &= a\bar{a} & 28)_+ \quad 1 &= a + \bar{a} \\
 &= (a + b)(a + \bar{b})(\bar{a} + b)(\bar{a} + \bar{b}) & &= ab + a\bar{b} + \bar{a}b + \bar{a}\bar{b} \\
 &= (a + b + c)(a + b + \bar{c})(a + \bar{b} + c)(a + \bar{b} + \bar{c}) \dots & &= abc + ab\bar{c} + a\bar{b}c + \dots \\
 &= \dots & &= \dots
 \end{aligned}$$

Im Laufe der weiteren Entwicklungen entstehen bei jedem weiter hinzukommenden Gebiet aus jedem vorhandenen Entwicklungsfaktor bzw. -summand deren zwei neue; die Zahl der Faktoren bzw. Summanden beträgt somit bei zwei Gebieten, nach denen entwickelt wird, $2 \cdot 2$, bei drei Gebieten $2 \cdot 2 \cdot 2$ oder 2^3 , usw., allgemein bei n Gebieten 2^n .

§ 63. **Entwicklung von Faktoren und Summanden.** Man „entwickle“ in einem Produkt ab und in einer Summe $a+b$ den einen Operanden b „nach dem anderen a “:

$$ab = a(a+b)(\bar{a}+b) = a(\bar{a}+b) \quad \left| \quad a+b = a+ab+\bar{a}b = a+\bar{a}b \right.$$

$$29)_x \quad \therefore ab = a(\bar{a}+b) \quad \left| \quad 29)_+ \quad \therefore a+b = a+\bar{a}b, \right.$$

sodann desgleichen einen jeden „nach dem anderen“,

$$30)_x \quad ab = (a+b)(a+\bar{b})(\bar{a}+b) \quad \left| \quad 30)_+ \quad a+b = ab+a\bar{b}+\bar{a}b. \right.$$

Es ergeben sich hier, besonders aus $29)_{x+}$, gewisse Rechenregeln ähnlich denen aus den Absorptionsgesetzen $13)_{x+}$. — Für drei Operanden hat man z. B. entsprechend $29)_{x+}$

$$abc = ab(\bar{b}+c) = a(\bar{a}+b)(\bar{a}+\bar{b}+c) \quad \left| \quad a+b+c = a+b+\bar{b}c = a+\bar{a}b+\bar{a}\bar{b}c. \right.$$

Man kann hiernach ein jedes Produkt so umformen, daß die Faktoren durchweg komplementär zueinander werden; und desgleichen läßt sich jede beliebig gegebene Summe aus durchweg zueinander disjunkten Gliedern zusammensetzen, — wonach eine solche Summe dann eine „reduzierte“ heißt.

§ 64. **Negation von Produkt und Summe.** Nach $30)_x$ kann man in der Entwicklung $28)_x$ der Null nach zwei Gebieten a und b statt der ersten drei Faktoren den Wert ab substituieren, und entsprechend in $28)_+$ die Summe $a+b$ aus $30)_+$, wonach sich ergibt teilweise mit Wechsel der Bezeichnung —

$$31)_x \quad \begin{array}{l} ab(\bar{a}+\bar{b}) = 0 \\ \bar{a}\bar{b}(a+b) = 0 \end{array} \quad \left| \quad 31)_+ \quad \begin{array}{l} 1 = a+b+\bar{a}\bar{b} \\ 1 = \bar{a}+\bar{b}+ab. \end{array} \right.$$

Hiernach ist aber ab mit $\bar{a}+\bar{b}$ und ebenso $a+b$ mit $\bar{a}\bar{b}$ zugleich disjunkt und komplementär, also obvers — Theorem 26) —

$$31)_x \quad \overline{ab} = \bar{a}+\bar{b} \quad \left| \quad 31)_+ \quad \overline{a+b} = \bar{a}\bar{b}, \right.$$

— Theoreme von De Morgan.

Beispiele (siehe auch § 69):

$$\begin{aligned} \overline{abc} &= \bar{a}+\bar{b}+\bar{c} \\ \overline{a+bc} &= \bar{a} \cdot \bar{bc} = \bar{a}(\bar{b}+\bar{c}) \\ \overline{a+b(c+d)} &= \bar{a}(\bar{b}+\bar{c}\bar{d}) \\ \overline{ab+\bar{a}\bar{b}} &= (\bar{a}+\bar{b})(a+b). \end{aligned}$$

Die De Morganschen Theoreme geben hiernach die Anweisung, wie man die Negation an einem Produkt, an einer Summe und an mehr-

fach zusammengesetzten Ausdrücken „ausführt“, d. h. zurückführt auf Negation der Operanden und Bestandteile.

§ 65. **Dualität.** Die Theoreme 31)_{x+} ermöglichen übrigens zusammen mit den andern Negationsgesetzen, besonders 21), 22), 23) und 25), je zwei hier beiderseits des Mittelstriches einander gegenübergestellte — einander „dual entsprechende“ — Propositionen aufeinander zurückzuführen, z. B. VI'_+ auf VI'_x in § 29: Es ist in VI'_x nach 25)

$$(x \notin a) = (\bar{a} \notin \bar{x}), \quad (x \notin b) = (\bar{b} \notin \bar{x})$$

$$(x \notin ab) = (\bar{a}\bar{b} = \bar{a} + \bar{b} \notin \bar{x}),$$

also folgt durch Substitution in VI'_x

$$(\bar{a} \notin \bar{x})(\bar{b} \notin \bar{x}) \notin (\bar{a} + \bar{b} \notin \bar{x})$$

oder nach entsprechendem Bezeichnungswechsel das Axiom VI'_+ .

Man gelangt hiernach zu dem folgenden „Dualitätsgesetz“: Wenn man in einem Theorem oder Axiom alle etwa vorkommenden Primärsubsumtionen umkehrt und gleichzeitig die Gebiete-Multiplikationszeichen mit Additionszeichen, sowie das Gebietssymbol 0 mit 1 vertauscht, so erhält man wieder eine richtige Aussage, das „duale Gegenstück“ der ursprünglichen. — Die im System der Theorie einzeln, ohne duales Gegenstück hingestellten Sätze, z. B. 26), sind sämtlich „zu sich selbst dual“, d. h. sie ändern sich nicht bei der hier beschriebenen „dualen Umwandlung“. — Die sekundären Beziehungs- und Operationszeichen bleiben von dieser Umwandlung unberührt. — Vgl. § 121 im zweiten Teil des Abrisses. —

§ 66. **Der Distributionssatz.** Schon in § 47 wurde ein Distributionsgesetz

$$\mathcal{A}) \quad a(b + c) = ab + ac$$

erwähnt und gewissermaßen vermißt, und in § 51 ist gezeigt, wie die „erste Subsumtion“ dieses Gesetzes

$$\mathcal{A}') \quad ab + ac \notin a(b + c)$$

schon aus den Axiomen I — VI folgt. Inzwischen sind nun die Mittel erworben zum Nachweis der noch übrigen umgekehrten Subsumtion \mathcal{A}'' und damit des ganzen Satzes \mathcal{A} .

Wird nämlich*) zur Abkürzung

$$a(b + c) = p, \quad ab + ac = q$$

*) Nach einem im wesentlichen von Herrn Korselt herrührenden Beweisverfahren — vgl. Schröder, Vorlesungen, II, 2, S. 422.

gesetzt, und somit, unter wiederholter Anwendung der De Morgan'schen Theoreme $31)_{x+}$,

$$\bar{p} = \bar{a} + \bar{b}\bar{c}, \quad \bar{q} = (\bar{a} + \bar{b})(\bar{a} + \bar{c}),$$

so hat man zwei einander dual entsprechende Beweise der zweiten Distributionsubsumtion $\mathcal{A})'' p \in q$ in den beiden Formen $24)_{x+}$ $p\bar{q} = 0$, $\bar{p} + q = 1$:

$$p\bar{q} = a(b+c)(\bar{a}+\bar{b})(\bar{a}+\bar{c}) = a\bar{b}\bar{c}(b+c) \underset{29)_x}{=} a \cdot 0 \underset{31')_x}{=} 0 \underset{12)_x}{=} 0$$

$$\bar{p} + q = \bar{a} + \bar{b}\bar{c} + ab + ac \underset{29)_+}{=} \bar{a} + b + c + \bar{b}\bar{c} \underset{31')_+}{=} \bar{a} + 1 \underset{12)_+}{=} 1.$$

Jetzt erst ist das Gesetz $\mathcal{A})$ unter die Theoreme einzureihen nebst seinem dualen Gegenstück:

$$32)_x \quad a(b+c) = ab + ac \quad | \quad 32)_+ \quad (a+b)(a+c) = a + bc,$$

welch letzteres ganz ebenso bewiesen werden kann und übrigens vermöge des Dualitätsprinzips bereits zugleich mitbewiesen ist.

Von mancherlei Anwendungen des Distributionsatzes, wie z. B.

$$32)'_x \quad (a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd \quad | \quad 32)'_+ \quad (a+c)(a+d)(b+c)(b+d) = ab + cd$$

sind diejenigen von $32)_x$ oder $\mathcal{A})$ dem Mathematiker geläufig; die anderen werden wo nötig am besten aus ersteren durch duale Umwandlung oder auch mit Hilfe zweimaliger Negation gewonnen. — Um beispielshalber den in Theorem $27)_x$ § 61 vorkommenden Ausdruck $a\bar{b} + \bar{a}b$, der kurz mit x bezeichnet werde, nach $32)_+$ in Faktoren zu entwickeln, kann man nach $31)_{x+}$ und $32)_x$ bilden:

$$x = a\bar{b} + \bar{a}b$$

$$\bar{x} = (\bar{a} + b)(a + \bar{b}) = \bar{a}\bar{b} + ab$$

$$\bar{\bar{x}} = x = (a + b)(\bar{a} + \bar{b}).$$

Man erhält so, als Ergänzung zu den Theoremen $27)_{x+}$,

$$27)'_{x+} \quad \{(a+b)(\bar{a}+\bar{b}) = 0\} = (a=b) = (1 = ab + \bar{a}\bar{b}).$$

Übrigens ist hier $27)'_x$ lediglich die Kontraposition von $27)'_+$ — Theorem 22) —, ebenso wie auch $27)_x$ von $27)_+$.

§ 67. **Umformung von Subsumtionen.** Es folgen noch einige bemerkenswerte Sätze betreffend die Frage nach der Möglichkeit, irgendein Gebietssymbol von der einen Seite einer Subsumtion oder Gleichung auf die andere hinüberzubringen, sowie ein beiderseits des Beziehungszeichens vorkommendes Symbol zu unterdrücken, — Möglichkeiten, die bei Umformung und Auflösung von Gleichungen mit Größensymbolen

4. $x = (a + bc)(b + c) = a(b + c) + bc,$
 $\bar{x} = (\bar{a} + \bar{b}\bar{c})(\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a}(\bar{b} + \bar{c}) + \bar{b}\bar{c}.$
5. $x = (\overline{ab} + \overline{cd})(\overline{e + f}) = (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d})\bar{e}\bar{f},$
 $\bar{x} = abcd + e + f.$

Die folgenden Ausdrücke sind durch Umformung möglichst zu vereinfachen — mittels Theorem 32)_x, 11)_x, 13)_{x+}.

6. $(a + bc)c = ac + bc = (a + b)c.$
7. $a(ab + bc) = ab + abc = ab.$
8. $(\bar{a}b + ac + \bar{b}c)abc = abc.$
9. $(\bar{a}b + ac + \bar{b}c)(a + b + c) = \bar{a}b + ac + bc.$
10. $a + b(c + d) + (a + b)c = a + b(c + d).$
11. $(a + b)(b + c) = a(b + c) + b = ac + b.$
12. $(a + b)(b + c)(c + d) = (ac + b)(c + d) = ac + bc + bd.$
13. $(a + b)(b + c)(c + d)(d + e) = (ac + b)(ce + d) =$
 $= c(ae + ad + be) + bd.$

Für die folgenden Umformungen sind außer den bisherigen namentlich noch die Theoreme 29)_{x+} und 20)₊, sowie die Entwicklung eines Gebiets nach einem anderen gemäß Axiom VII₊ beizuziehen.

14. $a(b + c) + \bar{c} = ab + ac + \bar{c} = ab + a + \bar{c} = a + \bar{c}$
15. $a(b + c)(\bar{a} + \bar{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{b} \cdot b\bar{c} = 0.$
16. $(a + \bar{b}\bar{c})(ac + \bar{b}) = ac + \bar{a}\bar{b} + \bar{b}\bar{c} = ac + \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{b}\bar{c} =$
 $= ac + \bar{b}\bar{c}.$
17. $a + \bar{b} + \bar{c} + b(a\bar{c} + \bar{a}c) = a + \bar{b} + \bar{c} + a\bar{c} + \bar{a}c =$
 $= a + \bar{b} + \bar{c} + c = 1.$
18. $\{\bar{a}\bar{b}c + b(\bar{a} + \bar{c})\} \{a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}(b + c)\} = b(\bar{a} + \bar{c}) \cdot \bar{a}(b + c) = \bar{a}b.$
19. $a(b\bar{c} + \bar{b}c) + \bar{c} + ab + \bar{a}\bar{b} = a\bar{b} + \bar{c} + ab + \bar{a}\bar{b} = a + \bar{b} + \bar{c}.$
20. $\bar{a}\bar{b} + \bar{a}b + a\bar{c} + \bar{a}c + bc = a(\bar{b} + \bar{c}) + \bar{a}(b + c) + bc =$
 $= a \cdot \bar{b}\bar{c} + \bar{a}(b + c) + bc = a + b + c.$
21. $\bar{a}(b\bar{c} + \bar{b}c) + ab + ac + bc = (\bar{a}\bar{b} + \bar{a}b + a + b)c + (\bar{a}b + ab)\bar{c} =$
 $= c + b.$
22. Sei $x = ab + ac + bc$ in Faktoren zu zerlegen;
 $\bar{x} = (\bar{a} + \bar{b})(\bar{a} + \bar{c})(\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c},$
 $x = (a + b)(a + c)(b + c).$

Der zweiwertige Gebietekalkul.

§ 70. **Das Zweigebietesystem.** Zur weiteren Entwicklung der Gebietetheorie — zur Lehre von den Funktionen und von der Auflösung der Gleichungen — werden aussagen-theoretische Hilfsmittel in ausgedehnterem Umfange beizuziehen sein, als solche mit den §§ 10—19 voraussetzungsweise eingeführt wurden, und es ist deshalb — im zweiten Teil dieses Abrisses — vor allem die Aussagentheorie zu begründen und so weit als nötig durchzuführen. Dieselbe wird sich aber als eine Gebietetheorie erweisen, und zwar als Theorie eines Gebietesystems mit möglichst wenigen — mit nur zwei Gebieten. Daher soll nun zunächst dieser „Zweigebietekalkul“ kurz behandelt werden, und zwar vorerst nur als Beispiel zum allgemeinen Gebietekalkul, noch ohne aussagentheoretische Deutung.

Ein Gebietesystem kann nämlich, wegen Axiom V neben Axiom I , nicht aus einem Gebiet allein bestehen — vgl. §§ 28 und 38.

Enthält aber ein System nicht mehr als zwei Gebiete, so können diese wegen der Null- und Einspostulate IV_{x+} und V keine anderen sein als eben die Gebiete 0 und 1.

§ 71. **Die speziellen Propositionen.** Es lassen sich leicht sämtliche Beziehungen und Knüpfungen zwischen den Gebieten 0 und 1 den Gebietsaxiomen und -theoremen entnehmen und vollständig zusammenstellen, nämlich

die Subsumtionen und bzw. die Unsubsumtion

$$0 \notin 0, \quad 1 \notin 1, \quad 0 \notin 1, \quad 1 \notin 0,$$

die Gleichungen und Ungleichungen

$$0 = 0, \quad 1 = 1, \quad 0 \neq 1, \quad 1 \neq 0,$$

endlich die Produkte, Summen und Negate

$$0 = 0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0 + 0 = \bar{1}$$

$$1 = 1 \cdot 1 = 0 + 1 = 1 + 0 = 1 + 1 = \bar{0}.$$

Damit sind auch die Werte aller jemals vorkommenden, aus 0 und 1 in noch so verwickelter Weise durch Multiplikation, Addition und Negation aufgebauten Gebietsausdrücke, sowie deren Beziehungen von vornherein bestimmt.

§ 72. **Zweiwertige Symbole.** Sind $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ allgemeine Symbole für die Gebiete dieses Systems, d. h. solche, deren jedes nur entweder 0 oder 1 bedeuten kann, so wird auch jedem daraus zusammengesetzten Ausdruck, z. B. $\alpha\beta + \bar{\gamma}$, einer der beiden Werte 0 und 1 zukommen, sobald die Werte der Einzelsymbole bestimmt sind.

Man kann somit auch leicht die Richtigkeit eines jeden beliebigen Gebietstheorems oder -axioms — z. B. des Axioms VII_x

$$(\alpha + \xi)(\bar{\alpha} + \xi) = \xi$$

im zweiwertigen Kalkül nachprüfen, indem man den darin vorkommenden Symbolen einzeln die Werte 0 und 1 nacheinander in allen möglichen Zusammenstellungen beilegt, — etwa wie das folgende Schema andeutet, worin die zusammengehörigen Werte kolonnenweise untereinander stehen.

$\xi =$	0	0	1	1
$\alpha =$	0	1	0	1
$\bar{\alpha} =$	1	0	1	0
$\alpha + \xi =$	0	1	1	1
$\bar{\alpha} + \xi =$	1	0	1	1
$(\alpha + \xi)(\bar{\alpha} + \xi) =$	0	0	1	1 = \xi

§ 73. **Synthetische Begründung des Zweigebietekalküls.** Sind die Propositionen des § 71 einmal bewiesen, so kann man auf dieselben alle weiteren Theoreme des zweiwertigen Gebietekalküls lediglich mittels „vollständiger Spezialisierung“, wie gezeigt, gründen, ohne weiterhin noch auf die Axiome oder andere Theoreme zurückzugreifen. Und man wird auch die Axiome und damit den ganzen Zweigebietekalkül — in synthetischer Weise — § 8 — aus den speziellen Aussagen des § 71 herleiten können, wenn diese Aussagen zuvor als richtig festgesetzt werden.

In der Tat erscheint dann z. B. das Axiom $I \alpha \in \alpha$, wo α nur 0 und 1 bedeuten kann, lediglich als Zusammenfassung — als Produkt — der beiden ersten Subsumtionen des § 71,

$$(\alpha \in \alpha) \equiv (0 \in 0)(1 \in 1),$$

das Axiom VII_x als Produkt seiner vier oben gedachten richtigen Spezialisierungen, usw., eine jede allgemeine Formel des Gebietekalküls — zunächst von der primären Aussagenart — ebenso als Produkt ihrer Spezialisierungen für alle möglichen Zusammenstellungen von 0 und 1 als Werte ihrer allgemeinen Symbole. Die Zahl der Spezialaussagen-

Faktoren ist z. B. 2, wenn nur *ein* allgemeines Symbol vorhanden ist; sie ist bei zwei Symbolen $2 \cdot 2$, bei drei Symbolen $2 \cdot 2 \cdot 2$ oder 2^3 , usw., bei n Symbolen 2^n . — In den Propositionen des Gebietekalküls finden sich selten mehr als drei allgemeine Symbole.

§ 74. **Spezialisierung der Sekundäraussagen.** Bei Sekundärsubsumtionen, wie Axiom *II* oder *III'*, verringert sich noch die Zahl der speziellen Aussagenfaktoren, deren Richtigkeit etwa zu prüfen wäre, da solche Sekundäraussagen nur die Geltung der Konklusionen behaupten für die Fälle, wo die Prämissen erfüllt sind. Nun wird z. B. die Relation $\alpha \in \beta$, sofern sie als Prämisse von *II* erfüllt sein soll, nur eine der drei in § 71 als richtig hingestellten Subsumtionen bedeuten können, und es hat daher die Spezialisierung $\alpha = 1, \beta = 0$ von vornherein auszuschneiden, — ebenso desgleichen, wenn $\beta = 1$ gesetzt wird, für die zweite Prämisse $\beta \in \gamma$ die Annahme $\gamma = 0$, — wonach statt 8 nur noch die 4 Wertezusammenstellungen bleiben:

$$\begin{array}{cccc} \alpha = 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta = 0 & 0 & 1 & 1 \\ \gamma = 0 & 1 & 1 & 1. \end{array}$$

Ähnliches gilt von den Sekundärgleichungen; dieselben lassen sich aus den Spezialisierungen ihrer Teilsubsumtionen multiplikativ zusammensetzen.

Sonach überzeugt man sich leicht, daß die Festsetzungen des § 71 ausreichen zur Synthese und Verifikation des Inhalts sämtlicher Gebietsaxiome. Der Zweigebietekalkül läßt sich also statt auf die Gebietsaxiome auch auf die Spezialaussagen des § 71 als axiomatische Festsetzungen gründen.

§ 75. **Die Zweiwertigkeits-Voraussetzung.** Zu den bisher bekannten, allgemein-gebietstheoretischen Sätzen kommen im zweiwertigen Kalkül noch einige Formeln, die im allgemeinen Gebietekalkül keine Geltung haben und lediglich aus der Voraussetzung der Zweiwertigkeit hervorgehen.

Diese Voraussetzung läßt sich zunächst auch selbst mittels der Formelsprache darstellen in der Gestalt: Ist ein allgemeines Symbol α nicht gleich Null, so ist es gleich Eins,

$$[1] \quad (\alpha \neq 0) \in (\alpha = 1),$$

und kontrañoniert

$$[1]_1 \quad (\alpha \neq 1) \in (\alpha = 0),$$

oder auch in Anbetracht, daß die Umkehrung

$$(\alpha = 0) \notin (\alpha \neq 1)$$

zufolge V schon im allgemeinen und somit auch im zweiwertigen Kalkül ohnehin gilt,

$$[2] \quad \begin{cases} (\alpha = 0) = (\alpha \neq 1) = (\bar{\alpha} = 1) \\ (\alpha = 1) = (\alpha \neq 0) = (\bar{\alpha} = 0). \end{cases}$$

Zwei ungleiche Gebiete sind hier also stets auch obvers,

$$[3] \quad (\alpha \neq \beta) \notin (\beta = \bar{\alpha}),$$

$$[4] \quad \begin{cases} (\alpha = \bar{\beta}) = (\alpha \neq \beta) = (\bar{\alpha} \neq \bar{\beta}) = (\bar{\alpha} = \beta), \\ (\alpha = \beta) = (\bar{\alpha} \neq \bar{\beta}) = (\alpha \neq \bar{\beta}) = (\bar{\alpha} = \bar{\beta}). \end{cases}$$

Die Zweiwertigkeits-Voraussetzung in der Form [2] ergibt weiter in Verbindung mit der Kontraposition des Theorems 24)_x und mit Theorem 14)_x (oder auch mit 24)₊ und 14)₊)

$$[5] \quad (\alpha \notin \beta) = (\alpha \bar{\beta} \neq 0) = (\alpha \bar{\beta} = 1) = (\alpha = 1)(\bar{\beta} = 1) = (\alpha = 1)(\beta = 0),$$

entsprechend der Bemerkung, daß die Relation $\alpha \notin \beta$, wofern sie erfüllt sein soll, unter den speziellen Festsetzungen des § 71 nur die einzige Unsubsumtion $1 \notin 0$ bedeuten kann.

Stets kann auch das Verfahren der vollständigen Spezialisierung zur Bestätigung der aufgestellten Sätze dienen.

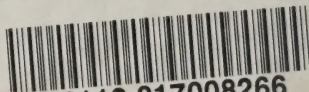


UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA

511.324SCH7A

C001 V001

ABRISS DER ALGEBRA DER LOGIK LEIPZIG



3 0112 017008266